

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 de Exercícios

1. Seja X o conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ e seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ contínua. Defina

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x) dx.$$

Mostre que (X, d) é um espaço métrico.

2. Seja $M = \mathbb{R}^2$. Mostre que (M, d_1) e (M, d_∞) são espaços métricos, onde, para $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$,

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \text{e} \quad d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Em seguida, defina e desenhe as bolas abertas de centro em $(0, 0)$ e raio unitário em (M, d_1) e (M, d_∞) .

Obs. Nunca mais ria do Quico do episódio do Chaves quando ele queria uma “bola quadrada” - ele só estava lidando com outra métrica diferente da euclidiana...

3. Seja \mathbb{R}^+ o conjunto dos números reais positivos. Mostre que

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

é uma métrica em \mathbb{R}^+ .

4. Seja $\mathfrak{B}(A, \mathbb{R})$ o espaço das funções limitadas de A em \mathbb{R} e defina

$$d : \mathfrak{B}(A, \mathbb{R}) \times \mathfrak{B}(A, \mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

Mostre que d define uma métrica em $\mathfrak{B}(A, \mathbb{R})$. Em seguida, desenhe $B(f, \frac{1}{2})$, onde $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = \cos(x)$ e $A = [0, \pi]$.

5. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Mostre que a aplicação $d : X_1 \times X_2 \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

define uma métrica em $X_1 \times X_2$, onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

6. Seja $X \neq \emptyset$ e \mathfrak{F} a família de todos subconjuntos finitos de X . Prove que a função $d : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$d(A, B) = \text{card}(A \Delta B)$$

define uma métrica em X .

7. Definimos o espaço de todas as sequências *limitadas pela norma do supremo*, e denotada por ℓ_∞ , o conjunto

$$\ell_\infty = \{(x_n)_n : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

- (a) Dê exemplos de seqüências em ℓ_∞ , mostrando assim, que ℓ_∞ está bem definido.
 (b) Defina a aplicação $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \rightarrow [0, +\infty)$ por

$$d((x_n), (y_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Mostre que (ℓ_∞, d) é um espaço métrico.

8. Mostre que uma seqüência (x_n) converge para a em (X, d) se, e somente se, a seqüência $(d(a, x_n))$ converge para 0 em \mathbb{R} com a métrica usual.
9. Mostre que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ em \mathbb{R}^2 , com a métrica usual se, e somente se, $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ em \mathbb{R} com a métrica usual.
10. Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$, prove que
- (a) $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$.
 (b) $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cup Y)$.
11. Mostrar com um exemplo que, dados $X, Y \subset \mathbb{R}$, $\text{int}(X \cup Y) \neq \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$.
12. Se $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$, determine $\text{int}(A)$.
13. Qual é o interior do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$ em relação a \mathbb{R}^2 ? Justifique.
14. Mostre que o subconjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ é um aberto de \mathbb{R}^2 .
15. Mostre que o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$ é um aberto do \mathbb{R}^2 .
16. Vimos na teoria a prova da Proposição 5.8, que diz: “a interseção finita de abertos de \mathbb{R} é um aberto de \mathbb{R} ”. Em seguida, observamos que a interseção infinita de abertos pode não ser um aberto de \mathbb{R} . Explique por quê a prova da Proposição 5.8 fica inválida se o número de abertos for infinito.
17. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto finito. Mostre que $X^c = \mathbb{R} \setminus X$ é um aberto de \mathbb{R} .
18. Sejam A e B abertos de \mathbb{R} e $z \in \mathbb{R}$. Prove que os conjuntos $A + B$ e $z + A$, definidos respectivamente por

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\} \text{ e } z + A = \{z + a : a \in A\}$$

são abertos de \mathbb{R} .