Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 04 de Exercícios - Sequências

1. Prove que cada limite a seguir pela definição.

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{3-5n} = -\dfrac{2}{5}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3n-1} = \dfrac{1}{3}$

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$ (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-4n}{4n-7} = -1$

2. Prove o seguinte teorema, versão para sequências do Teorema do Sanduíche:
   Teorema. *Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.*

3. Utilize o teorema anterior para provar que $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$.

4. Seja (x_n) a sequência definida por $x_n = \sqrt[n]{2}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

5. Sendo $a, b \geq 0$, mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

6. **(Sel. Mestr. UFRGS 2010/1)** Prove que se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência limitada, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. Mostre com um contra-exemplo que a conclusão acima não é válida se retirarmos a hipótese de $(b_n)_{n\geq 0}$ ser limitada.

7. Prove que se (x_n) for uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) tem o mesmo limite a.

8. Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Prove que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = a.$$

9. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

   Sugestão: Escreva inicialmente $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$.

10. Seja (x_n) uma sequência de números reais e suponha que $\exists \lambda$, com $0 < \lambda < 1$ e $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_{n+1}| \leq \lambda |x_n|$, $\forall n \geq n_0$. Prove que $x_n \to 0$.

11. Seja (x_n) uma sequência de números reais positivos tais que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Prove que $\exists \lambda$, com $0 < \lambda < 1$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_{n+1}| \leq \lambda |x_n|$, $\forall n \geq n_0$. Conclua que
$$x_n > 0,\ \forall n,\ \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Longrightarrow x_n \to 0.$$

    Em seguida, use o resultado acima para mostrar que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ \forall a > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

12. Encontre o limite da seguinte sequência, justificando:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}.$$

13. Defina uma sequência (x_n) recursivamente por

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 1.$$

Prove que (x_n) é monótona e limitada e calcule o seu limite.

14. **(Sel. Mestr. UFSM 2014)** Seja $a > 0$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida indutivamente por

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right).$$

Mostre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e calcule o seu limite.

15. **(Sel. Mestr. UFSM 2010/1)** Seja (a_n) uma sequência dada recursivamente por $a_1 = \sqrt{3}$ e $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$, $n > 1$. Mostrar que (a_n) é convergente. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

16. Prove que a sequência

$$1,\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ ...$$

converge e que seu limite é $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

17. Seja $x_1 = 1$ e ponha $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$. Verifique que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|.$$

Conclua que existe $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, e determine o valor de a.

18. Ponha $x_1 = 1$ e defina $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$. Mostre que a sequência (x_n), assim obtida, é limitada. Determine $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

19. Dado $a > 0$, defina indutivamente a sequência (x_n) pondo $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Prove que (x_n) é convergente e calcule o limite

$$L = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}$$

20. **(Sel. Mestr. UFSM 2011/1)** Seja (a_n) a sequência definida indutivamente por:

$$a_1 = \sqrt{2} \ \text{ e } \ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \ \text{ para } \ n > 1.$$

   (a) Mostre, por indução, que $a_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) Mostre que (a_n) é crescente (sugestão: verifique que $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_N)(1 + a_n) > 0$ para $n > 1$, então $a_{n+1} > a_n$).
   (c) Conclua, pelos itens anteriores, que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

21. Considere a sequência de números reais

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2+\frac{1}{2}},\quad \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\quad \cdots$$

Mostre que essa sequência é convergente e encontre seu limite.

22. **(Sel. Mestr. UFRGS 2008/2)** Considere duas sequências reais $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ tais que a_n converge para a e b_n converge para b. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então obtenha de forma rigorosa o limite da sequência $(a_n f(b_n))_n$.