RESOLUÇÃO DE ALGUNS EXERCÍCIOS DA LISTA 01 à 04.

LISTA 01.

09) $A, B \in E$

Suponha $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = E$.

Mostrar: $B = A^c$ e $A = B^c$.

AF. 01: $B \subset A^c$:

Dado $x \in B$. Como $A \cap B = \emptyset$, segue que $x \notin A$, ou seja, $x \in A^c$.

Logo, vale a AF. 01.

AF. 02: $A^c \subset B$:

Dado $x \in A^c$. Então $x \notin A$. Como $A \cup B = E$ e $x \notin A$ concluímos que $x \in B$.

Logo vale a AF. 02.

Pelas AF. 01 e 02 segue que $B = A^c$.

AF. 03: $A \subset B^c$. Se prova análogo à AF. 01

AF. 04: $B^c \subset A$. Se prova análogo à AF. 02

Das AF. 03 e 04 segue que $A = B^c$.

---

13)

(a) $\forall \lambda \in \Lambda, A_\lambda \subset B$.

Mostrar: $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset B$.

Dado $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Então $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tal

que $x \in A_{\lambda_0}$. Como $A_\lambda \subset B$, $\forall \lambda$, em particular tem-se que $x \in A_{\lambda_0} \subset B$,

i.e., $x \in B$

Logo, vale (a).

(b) $\forall \lambda \in \Lambda$, $A_\lambda \subset B_\lambda$.

Mostrar: $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$

Dado $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Então $x \in A_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Como $A_\lambda \subset B_\lambda$, $\forall \lambda$, segue que

$x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, e então vale (b).

---

15) FEITO EM AULA.

---

26) FEITO EM AULA.

---

28) $(x+iy) R (z+it) \overset{def.}{\iff} x^2+y^2 = z^2+t^2$,
$x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

(a) R é rel. de equiv. pois:

1 – REFLEXIVIDADE:

$(x+iy) R (x+iy) \iff x^2+y^2 = x^2+y^2$

OK!

02

2 – SIMETRIA:

Se $(x+iy)\,R\,(a+bi)$ então $x^2+y^2=a^2+b^2$,

i.e., $a^2+b^2=x^2+y^2$, ou seja, $(a+ib)\,R\,(x+iy)$

Logo, R é simétrica.

3 – TRANSITIVIDADE:

Se $(x+iy)\,R\,(a+ib)$ e $(a+ib)\,R\,(p+iq)$,

então:

$$x^2+y^2=a^2+b^2 \quad \text{e} \quad a^2+b^2=p^2+q^2,$$ ou

seja,

$$x^2+y^2=p^2+q^2, \text{ i.e.:}$$

$(x+iy)\,R\,(p+iq)$, i.e., R é transitiva.

(b)
$$\begin{aligned}
\overline{1+i} &= \{x+iy \in \mathbb{C} : (x+iy)\,R\,(1+i)\} \\
&= \{x+iy \in \mathbb{C} : x^2+y^2 = 1^2+1^2\} \\
&= \{x+iy \in \mathbb{C} : x^2+y^2 = 2\} \\
&= \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 2\} \\
&= \{\text{conj. de pontos no plano complexo que possuem } |z|^2=2\}.
\end{aligned}$$

30) FEITO EM AULA.

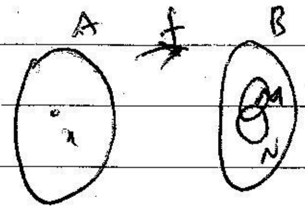
32) FEITO EM AULA.

LISTA 02.

04) $f: A \to B$; $M, N \subset B$

MOSTRAR: $f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N)$

AF. 01: $f^{-1}(M \setminus N) \subset f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N)$.



Dado $x \in f^{-1}(M \setminus N)$. Então

$f(x) \in M \setminus N$, e disso segue que $f(x) \in M$ e $f(x) \notin N$, i.e;

$x \in f^{-1}(M)$ e $x \notin f^{-1}(N)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N)$

Logo, vale a AF. 01.

AF. 02: $f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N) \subset f^{-1}(M \setminus N)$:

Dado $x \in f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N)$. Então

$x \in f^{-1}(M)$ e $x \notin f^{-1}(N)$, ou seja,

$f(x) \in M$ e $f(x) \notin N \Rightarrow f(x) \in M \setminus N$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(M \setminus N)$. Logo, vale a AF. 02 (04)

Dos AF. 01 e 02 segue o resultado.

09) Como $h \circ g = h \circ f$, então, sendo $f, g : A \to B$, $\forall x \in A$ temos:

$$(h \circ g)(x) = (h \circ f)(x),$$

ou seja,

$$h(g(x)) = h(f(x)).$$

Como h é injetiva, concluímos que $g(x) = f(x)$, $\forall x \in A$, ou seja, $g = f$.

$\square$

13) FEITO EM AULA.

15) FEITO EM AULA.

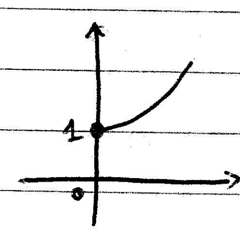
16)

(a) $$f(-x) = \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} =$$

$$= \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x) =$$

$$= f(x).$$

(b) Redefina pondo $f : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$



(c) $x = \operatorname{arcosh} y \Leftrightarrow y = \cosh x$.

(d) $f^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$

$x = f^{-1}(y) = \operatorname{arcosh}(y) \Leftrightarrow y = \cosh x$.

$\Leftrightarrow y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\Leftrightarrow 2y = e^x + \dfrac{1}{e^x}$

$\Leftrightarrow 2y \cdot e^x = e^{2x} + 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$

Ponho $\boxed{e^x = w}$ e então

$w^2 - 2wy + 1 = 0$

$w = \dfrac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2 \cdot 1} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$

$\Leftrightarrow w = y + \sqrt{y^2-1}$ ou $w = y - \sqrt{y^2 - 1}$

$\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ ou $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$

$\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ ou

$x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$

Como $y \in [1, +\infty)$, então

$1 \leq y \Rightarrow y = \sqrt{y^2} > \sqrt{y^2 - 1}$ e

então temos $y \not\geq 1$ e $-\sqrt{y^2 - 1} > -y$

Assim: $y - \sqrt{y^2-1} \not\geq 1 - y$, mas $1 - y \leq 0$! 06

Portanto, $x = \ln(y - \sqrt{y^2-1})$ não serve!

Então, só tem sentido

$$f^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(y) = x = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

Com essa notação:

$$f^{-1} \circ f : [0, +\infty) \to [0, +\infty);$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1}\right)$$

$$= \underset{\text{etc.}}{\cdots} = x,$$

e

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = \cdots = y,$$

onde $f \circ f^{-1} : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$

LISTA 03

01) (b) FEITO EM AULA.

03) – FEITO EM AULA.

08) – FEITO EM AULA.

10) $(G_1, \perp)$; $(G_2, \square)$ – grupos.

Defina em $G_1 \times G_2$ a operação:

$$(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 \perp g_1', g_2 \square g_2')$$

AF.: $(G_1 \times G_2, \cdot)$ é um grupo.

(a) ASSOCIATIVIDADE: Dados $\alpha = (x_1, x_2)$, $\beta = (y_1, y_2)$ e $\gamma = (z_1, z_2)$ em $G_1 \times G_2$, temos:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (x_1, x_2) \cdot ((y_1, y_2) \cdot (z_1, z_2)) =$$

$$= (x_1, x_2) \cdot (y_1 \perp z_1, y_2 \square z_2)$$

$$= (x_1 \perp (y_1 \perp z_1), x_2 \square (y_2 \square z_2)) =$$

em G_1 e em G_2 valem as associatividades pois separadamente são grupos.

$$= ((x_1 \perp y_1) \perp z_1, (x_2 \square y_2) \square z_2) =$$

$$= (x_1 \perp y_1, x_2 \square y_2) \cdot (z_1, z_2)$$

$$= ((x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)) \cdot (z_1, z_2) =$$

$$= (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$ Logo, é associativo

(b) elemento neutro: Sejam e_1 o neutro para $\perp$ em G_1 e e_2 o neutro para $\square$ em G_2.

Então, o neutro para $G_1 \times G_2$ será (e_1, e_2):
$\forall (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$, tem-se:

$$(x_1, x_2) \cdot (e_1, e_2) = (x_1 \perp e_1, x_2 \square e_2) =$$
$$= (x_1, x_2)$$

Analogamente se verifica que
$$(e_1, e_2) \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2).$$

(c) elemento simétrico:
Sendo x^{-1} o simétrico de x em G_1 e y^{-1} o simétrico de y em G_2,
temos que o simétrico de $(x, y) \in G_1 \times G_2$ será (x^{-1}, y^{-1}), pois:

$$(x, y) \cdot (x^{-1}, y^{-1}) = (x \perp x^{-1}, y \perp y^{-1}) =$$
$$= (e_1, e_2).$$

Analogamente, se mostra que
$$(x^{-1}, y^{-1}) \cdot (x, y) = (e_1, e_2).$$

Portanto, $(G_1 \times G_2, \cdot)$ é um grupo.

15) $(ab)^2 = a^2 . b^2$, $\forall a, b \in G$.

Mostrar que G é abeliano.

Como

$$(a.b)^2 = (ab).(ab),$$

e como $a^2 b^2 = a.a.b.b$,

Obs.: → não podemos "embaralhar" o produto pois não se tem a comutatividade.

temos,

$$(a.b).(a.b) = (ab)^2 = a^2 b^2 = a.a.b.b$$

⟹ multiplicando à esquerda por a^{-1} e à direita por b^{-1}, obtemos:

$$\underbrace{a^{-1}a}_{e}b.a\underbrace{b.b^{-1}}_{e} = \underbrace{a^{-1}.a}_{e}.a.b.\underbrace{b.b^{-1}}_{e}$$

$$\Rightarrow b.a = a.b$$, i.e., G é abeliano!

16) G – grupo multiplicativo. (a operação é o "produto" – a notação).

Mostrar: $(a.b.c)^{-1} = c^{-1}.b^{-1}.a^{-1}$

Para isso, basta notar que:

$$(c^{-1}.b^{-1}.a^{-1}).(a.b.c) = c^{-1}.b^{-1}.\underbrace{(a^{-1}.a)}_{=e}.b.c$$

$$= c^{-1}\underbrace{b^{-1}.b}_{e}.c = c^{-1}.c = e,$$

ou seja, $c^{-1}.b^{-1}.a^{-1} \in G$ é o simétrico (inverso multiplicativo) de $a.b.c$, e então denotamos (NOTAÇÃO) por

$$(a.b.c)^{-1} = c^{-1}.b^{-1}.a^{-1}.$$

2ª PARTE:

Achar $x \in G$ tal que $abcxb = c$.

Basta usar a 1ª PARTE:

$$abc.x.b = c \quad \text{(MULTIPLICANDO POR } (abc)^{-1}\text{:)}.$$

$$\Rightarrow \underbrace{(abc)^{-1}.(abc)}_{e}\, xb = (abc)^{-1}.c$$

$$x.b = c^{-1}.b^{-1}.a^{-1}.c$$

Por fim, multiplicando à direita por b^{-1}:

$$x\underbrace{b.b^{-1}}_{e} = c^{-1}.b^{-1}.a^{-1}.c.b^{-1}$$

$$\boxed{x = c^{-1}.b^{-1}.a^{-1}.c.b^{-1}}$$

LISTA 04.

06) FEITO EM aula.

07) FEITO em aula.

09) FEITO em aula.

10) $H < G$.

$$N(H) := \{ g \in G : gHg^{-1} = H \}.$$

$N(H) \neq \emptyset$ pois $e.H.e^{-1} = H$. Logo, $e \in N(H)$.

AF.: $N(H) < G$.

Dados $\alpha, \beta \in N(H)$, então

(i) $\alpha H \alpha^{-1} = H$ e $\beta H \beta^{-1} = H$.

Assim:

$$(\alpha.\beta)\, H\, (\alpha\beta)^{-1} = \alpha \underbrace{(\beta.H.\beta^{-1})}_{H} \alpha^{-1} = \alpha H \alpha^{-1} = H$$

$\beta H \beta^{-1} = H$

Então $\alpha.\beta \in H$.

(ii) $\alpha^{-1} \in N(H)$? $\alpha \in N(H) \Longrightarrow$

$\Rightarrow \alpha H \alpha^{-1} = H \Longrightarrow \alpha\alpha^{-1} H \alpha^{-1} = \alpha^{-1} H$

(MULTIPL. α^{-1} à esq.)

$$\Rightarrow H\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\cdot H. \xRightarrow[\text{DIREITA}]{\text{MULTIPLI. POR } \alpha \text{ À}} H = \alpha^{-1} H \alpha.$$

Logo, $\alpha^{-1} \in N(H)$.

Como $\alpha.\beta \in N(H)$ e $\alpha^{-1} \in N(H)$, segue que $N(H) < G$.