Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 - Subgrupos

1. Suponha que em um grupo G todo elemento é seu próprio inverso. Mostre que G é abeliano.

2. Determine todos os subgrupos de $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

3. Sejam G um grupo e $K \subset H \subset G$, não vazios, tais que $H < G$ e $K < H$. Mostre que $K < G$.

4. Seja G um grupo qualquer. Defina o *centro de* G por
$$Z(G) := \{x \in G \, : gx = xg, \, \forall g \in G\}.$$
   (a) Mostre que $Z(G) < G$.
   (b) Mostre que G é abeliano se, e somente se, $Z(G) = G$.

5. Sejam G um grupo e a um elemento em G. Defina $f_a : G \to G$ por $f_a(x) = axa^{-1}$. Mostre que o conjunto de todas as aplicações f_a, com $a \in G$, é um grupo com a composição de funções.

6. Sejam G um grupo e $H < G$. Seja $x \in G$. Considere o conjunto xHx^{-1} o subconjunto de G formado por todos os elementos xhx^{-1} com $y \in H$. Mostre que $xHx^{-1} < G$.

7. Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G.
   (a) Mostre que $H \cap K$ é um subgrupo de G.
   (b) Mais geralmente, sendo $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subgrupos de G, mostre que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ é um subgrupo de G.

8. Sejam G um grupo e $(H_i)_{i \in I}$ uma família de subgrupos de G. Suponha que $\forall i, j \in I$, $H_i \subset H_j$ ou $H_j \subset H_i$. Mostre que $\bigcup_{i \in I} H_i < G$.

   Se tirarmos a hipótese $\forall i, j \in I$, $H_i \subset H_j$ ou $H_j \subset H_i$, a tese continua válida? Justifique.

9. Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G. Defina o conjunto HK por
$$HK = \{ab \, : a \in H \text{ e } b \in K\}.$$
   Mostre que $HK < G \Leftrightarrow HK = KH$.

10. Seja G um grupo e $H < G$. Defina o conjunto $N(H)$ por
$$N(H) := \{g \in G \, : \, gHg^{-1} = H\}.$$
   O conjunto $N(H)$ é chamado de *normalizador de* H *em* G. Mostre que $N(H) \neq \emptyset$ e prove que $N(H) < G$.