Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 - Grupos

1. Em cada item a seguir temos definida uma operação em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Verifique se ela é associativa.
   (a) $(a, b) \star (c, d) = (ac, 0)$.
   (b) $(a, b) \circ (c, d) = (a + c, bd)$
   (c) $(a, b) \perp (c, d) = (ac, ad + bd)$

2. Considere a operação $\star$ em $\mathbb{R}$ definida por
$$x \star y = ax + by + cxy,$$
onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são números reais dados. Obtenha as condições sobre a, b, c para que $\star$ seja associativa.

3. Considere a operação $\oplus$ sobre o conjunto dos reais não-negativos definida por
$$x \oplus y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$
Verifique se $\oplus$ é comutativa, associativa, se possui elemento neutro e se existem elementos invertíveis.

4. Dizemos que uma operação $*$ em um conjunto não vazio A é *totalmente não associativa* se
$$(x * y) * z \neq x * (y * z),\ \forall x, y, z \in A.$$
Mostre que se $*$ é totalmente não associativa, então $*$ não é comutativa.

5. Estabeleça as condições sobre $m, n \in \mathbb{Z}$ de modo que a operação $\star$ sobre $\mathbb{Z}$ dada pela lei $x \star y = mx + ny$:
   (a) seja associativa;
   (b) seja comutativa;
   (c) admita elemento neutro.

6. Considere $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas as funções reais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e $\circ$ a operação de composição entre funções em F. Mostre que $f(x) = 3x - 1 \in F$ é simetrizável mediante a operação $\circ$ em F.

7. Sejam E e F dois conjuntos onde estão, respectivamente, definidas as operações $\star$ e Δ, as quais são associativas e possuem neutros. Sobre o conjunto $E \times F$ definimos a operação $\diamond$ por
$$(a, b) \diamond (c, d) = (a \star c, b \Delta d).$$
   (a) Mostre que $\diamond$ é associativa e possui elemento neutro.
   (b) Determine os elementos inversíveis de $E \times F$ para esta operação.

8. Mostre que $\mathbb{R}$ munido da operação $\star$ definida por

$$x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

é um grupo abeliano.

9. Mostre que $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q}$ munido da operação $\star$ definida por

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, bc + d)$$

é um grupo.

10. Sejam $(G_1, \perp)$ e $(G_2, \Box)$ dois grupos. No conjunto $G_1 \times G_2$ defina a operação

$$(g_1, g_2) \cdot (g_1^{'}, g_2^{'}) = (g_1 \perp g_1^{'}, g_2 \Box g_2^{'}).$$

Mostre que $G_1 \times G_2$ com a operação acima é um grupo.

11. Construa o conjunto das simetrias espaciais $D_\Box$ de um quadrado com a multiplicação sendo a composição, e verifique que é um grupo. Construa a tábua da multiplicação. Quais elementos geram o grupo?

12. Construa a tábua da multiplicação das simetrias espaciais de um hexágono regular. Mostre que também é um grupo. Quais elementos geram o grupo?

13. Sejam S um conjunto, G um grupo e $f : S \to G$ uma aplicação bijetiva. Para cada $x, y \in S$, defina o produto $x \star y$ por

$$x \star y = f^{-1}(f(x)f(y)).$$

Mostre que esta multiplicação define uma estrutura de grupo sobre S.

14. Construa a tábua da operação $\star$ sobre $G = \{e, a, b\}$, sabendo que $(G, \star)$ é um grupo.

15. Seja G um grupo. Mostre que se $(ab)^2 = a^2b^2$, para quaiquer $a, b \in G$, então G é um grupo abeliano.

16. Sejam a, b, c elementos de um grupo multiplicativo G. Prove que $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$. Obtenha $x \in G$ tal que $abcxb = c$.

17. Determine $x \in S_5$ que seja solução da equação $a^2xb^{-1} = c$, onde

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$