Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 - Funções

1. Sejam $f : A \to B$ uma função e $X, Y \subset A$. Prove que valem as seguintes propriedades:
   (a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;
   (b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$;
   (c) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \cap f(Y)$;
   (d) $f(\emptyset) = \emptyset$.

2. Sejam $f : A \to B$ uma função e $Y, Z \subset B$. Prove que valem as propriedades:
   (a) $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$;
   (b) $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$;
   (c) $f^{-1}(Y^{\complement}) = (f^{-1}(Y))^{\complement}$;
   (d) $Y \subset Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$.

3. Sejam $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos, com $X_\lambda \subset A$, $\forall \lambda \in \Lambda$ e $f : A \to B$ uma função. Mostre que
$$f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(X_\lambda).$$

4. Seja $f : A \to B$ uma função e $M, N \subset B$. Mostre que
$$f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N).$$

5. Seja $f : A \to B$ uma função e $(B_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos indexada por $i \in I$, tal que $B_i \subset B$, $\forall i \in I$. Mostre que
$$f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{e que} \quad f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

6. Construa exemplos de funções que sejam:
   (a) injetivas, mas não sobrejetivas;
   (b) sobrejetivas, mas não injetivas;
   (c) bijetivas.

7. Dizemos que dois conjuntos A e B são *equivalentes* quando existir uma função $f : A \to B$ bijetiva. Com base nesta definição, mostre que os conjuntos a seguir são equivalentes:
   (a) $[-2, 2]$ e $[0, 1]$.   (b) $(3, 5]$ e $[-2, 7)$ (c) $(0, 1)$ e $\mathbb{R}$.

8. Mostre que a função $f : \mathbb{R} - \{\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ definida por $f(x) = \dfrac{ax - b}{cx - d}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$ é bijetiva.

9. Sejam as aplicações $f : A \to B$, $g : A \to B$ e $h : B \to D$. Prove que se h é injetiva e $h \circ g = h \circ f$, então $g = f$.

10. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to D$. Supondo g bijetiva, prove que f é injetiva se, e somente se, $g \circ f$ é injetiva.

11. Sejam as funções $f : A \to B$, definida por $y = f(x)$; identidade em A, anotada por $id_A : A \to A$ e identidade em B, anotada por $id_B : B \to B$.

    (a) Prove que $f \circ id_A = f$ e $id_B \circ f = f$.

    (b) As funções id_A e id_B são iguais? Justifique.

12. Encontre duas inversas à esquerda para $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + \sqrt{x}$.

13. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ definida por $f(x, y) = (2x + 3, 4y + 5)$. Prove que f é injetiva. Após isto, encontre duas inversas à esquerda para f. A função f é sobrejetiva? Justifique.

14. Sendo $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ definida por $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ e $g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ dada por $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$, determine $g \circ f$ e $f \circ g$. O que se conclui dos resultados obtidos?

15. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ inversíveis. Mostre que $g \circ f : A \to C$ é inversível e que $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$, $\forall x \in A$.

16. Definimos a função *cosseno hiperbólico* de um arco x da seguinte forma:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

    (a) Mostre que $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, i.e., a função cosseno hiperbólico é uma função par.

    (b) Pelo item (a) temos que a função cosseno hiperbólico é simétrica em relação ao eixo vertical. Logo, f não é bijetiva. Redefina f de modo a ser bijetiva.

    (c) A partir do feito em (b) defina a função *arco cosseno hiperbólico*.

    (d) Procure representar a definição feita acima para o arco cosseno hiperbólico em termos de logaritmo natural. Com esta representação logarítmica, mostre que arco cosseno hiperbólico e cosseno hiperbólico são inversas uma da outra.