Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 - Cardinalidade e enumerabilidade

1. Mostre que dois intervalos abertos (a, b) e (c, d) são equivalentes.

2. Sejam A, B, M e N conjuntos, tais que $A \sim M$ e $B \sim N$. Mostre que $A \times B \sim M \times N$.

3. Prove que $f : (0, 1) \to (0, 1]$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{se } x = \frac{1}{n},\ n \geq 2, \\ x & \text{caso contrário,} \end{cases}$$
é bijetora (disso, concluímos que $(0, 1) \sim (0, 1]$).

4. Sejam A e B conjuntos, tais que $A \subset B$. Mostre que $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$.

5. Dados A, B e C conjuntos, tais que $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ e $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} C$. Mostre que $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} C$.

6. Mostre que se $\operatorname{card} A = \operatorname{card} C$ e $\operatorname{card} B = \operatorname{card} D$, com $A \cap B = \emptyset = C \cap D$, então $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(C \cup D)$. Dê um contra-exemplo mostrando que o resultado não vale quando os conjuntos não são disjuntos.

7. Prove que $\operatorname{card}(a, +\infty) = \operatorname{card}(-\infty, 0)$, onde $a \in \mathbb{R}$.

8. Mostre que o conjunto $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável.

9. O conjunto $X = \{1 + \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2},\ 3 + \sqrt{2}, ...\}$ é enumerável ou não enumerável? Justifique.

10. Prove que o conjunto $X = \{\ln(n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ é enumerável.

11. Prove que o conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais é não enumerável.

12. Prove a Proposição: *"O produto cartesiano enumerável de conjuntos enumeráveis é não enumerável"*. (Dica: Suponha, por absurdo, que o produto cartesiano enumerável de enumeráveis $A_1 \times A_2 \times ...$ seja enumerável. Use o método da diagonal de Cantor e construa um elemento $b = (b_1, b_2, ...)$ que pertenceria ao produto enumerável, mas que não é nenhum elemento $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ...)$ da lista infinita construída para o produto, chegando, assim, numa contradição.)

13. Use o método da diagonal de Cantor para mostrar que o conjunto de todas as sequências infinitas formadas apenas pelos dígitos 0 e 1 é não enumerável.

14. Prove que o conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais é não enumerável.

15. Prove que $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ é não enumerável.

16. Prove que $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$, dada por

$$f(\frac{m}{n}) = 2^m \cdot 3^n,$$

é injetora. Disso, conclua que $\mathbb{Q}^+$ é enumerável.

17. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$. Mostre que $(a, b) \sim (0, 1)$, ou seja, qualquer intervalo aberto é equivalente ao intervalo $(0, 1)$. Conclua que $(a, b) \sim \mathbb{R}$ e que se $c < d$, então, $(a, b) \sim (c, d)$.

18. Mostre que a cardinalidade de $\mathbb{R}^2$ é $\mathfrak{c}$. Conclua daí, que a cardinalidade do conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos também é o contínuo $\mathfrak{c}$. (Dica: Para a primeira parte do exercício, defina $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ por: para $a = 0, a_1 a_2 a_3 ...$ e $b = 0, b_1 b_2 b_3 ...$,

$$f(a, b) = \begin{cases} 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 ... & \text{se} \quad (a, b) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (a, b) = (0, 0) \end{cases}.$$

Mostre que f é bijetora e daí, card $([0, 1] \times [0, 1]) = \mathfrak{c}$. Como $[0, 1] \sim (0, 1) \sim \mathbb{R}$, conclui-se que card $\mathbb{R}^2 = \mathfrak{c}$.)

Obs.: Note que a primeira parte deste exercício mostra que uma reta e um plano possuem a mesma cardinalidade, o contínuo $\mathfrak{c}$.

19. Prove que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ e que $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

20. Prove que a união enumerável de conjuntos de cardinalidade $\mathfrak{c}$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. Em outras palavras, mostre que $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + ... = \mathfrak{c}$.