

Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 - Corpos e o corpo dos reais

1. Seja E o espaço fundamental e considere o conjunto $F = \{A : A \subset E\}$, munido com as operações de união e intersecção de conjuntos. Mostre que (F, \cup, \cap) não é um corpo.
2. Seja \mathbb{K} um corpo. Utilizando-se os axiomas, prove cada igualdade a seguir:
 - (a) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$
 - (b) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
 - (c) $-(-x) = x$
 - (d) $-(x - y) = y - x$
3. Mostre que $(x^{-1})^{-1} = x, \forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, onde \mathbb{K} é um corpo.
4. Mostre que, num corpo \mathbb{K} , se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.
5. Seja \mathbb{K} um corpo. Prove os seguintes fatos:
 - (a) (*Unicidade do zero*) Se $0' \in \mathbb{K}$ é tal que $x + 0' = x, \forall x \in \mathbb{K}$, então $0' = 0$.
 - (b) (*Unicidade da unidade*) Se $1' \in \mathbb{K}$ é tal que $x \cdot 1' = x, \forall x \in \mathbb{K}$, então $1' = 1$.
 - (c) Dados $a, b \in \mathbb{K}$, mostre que a equação $a + x = b$ tem solução única.
 - (d) Dados $a, b \in \mathbb{K}$, mostre que a equação $a \cdot x = b$ tem solução única.
6. Sejam x e y , ambos positivos em um corpo ordenado \mathbb{K} , com $x < y$. Prove que $y^{-1} < x^{-1}$.
7. Seja \mathbb{K} um corpo ordenado. Prove as seguintes propriedades:
 - (a) $x > y$ e $y > z \Rightarrow x > z$.
 - (b) $x > 0$ e $y < 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$.
 - (c) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
8. Em um corpo ordenado, se $a < b$, mostre que $a < \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b < b$. Mais geralmente, mostre que
$$a < ra + (1 - r)b < b,$$
sempre que $a < b$ e $0 < r < 1$.
9. (Desigualdade de Bernoulli) Em um corpo ordenado, seja x qualquer elemento tal que $x \geq -1$. Prove que
$$(1 + x)^n \geq 1 + nx,$$
para todo inteiro positivo n .

10. Dados a, b, ε num corpo ordenado \mathbb{K} , com $\varepsilon > 0$, prove que

$$|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon.$$

11. Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.

12. Mostre que o logaritmo de 3 na base 2 é irracional.

13. (Seção áurea de um segmento) Considere um segmento AB de comprimento \overline{AB} , e seja C o ponto de AB que determina a seção áurea de AB , i.e., $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{BC}^2$. Mostre que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ é um número irracional.

14. Prove cada afirmação a seguir caso seja verdadeira, ou exiba um contra-exemplo caso seja falsa:

- (a) A soma de dois números racionais é sempre racional.
- (b) A soma de dois números irracionais é sempre irracional.

15. Mostre que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

16. Representar $\sqrt{5}$ sobre a forma de fração contínua.

Sugestão: Escreva $\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2$.

17. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere os intervalos $I_n = [a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostre

$$\text{que } \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}.$$

item Dado $a \in \mathbb{R}$, considere os intervalos $J_n = (a, a + \frac{1}{n})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostre

$$\text{que } \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset.$$

18. Dados a, b, ε em um corpo ordenado \mathbb{K} , onde $\varepsilon > 0$. Prove que

$$|a - b| < \varepsilon \implies |b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon.$$

19. Dados x, y num corpo ordenado \mathbb{K} , com $y \neq 0$, prove que $|x \cdot y^{-1}| = |x| \cdot |y|^{-1}$.

20. Prove que $|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| \geq a_3 - a_1$, com $a_1 < a_2 < a_3$.

21. Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, prove que se para todo $\varepsilon > 0$, $a < b + \varepsilon$, então $a \leq b$.

22. Demonstre, no corpo dos reais, as seguintes desigualdades:

- (a) $|xy - ab| \leq |x||y - b| + |b||x - a|$
- (b) $|xy - ab| \leq (|x - a| + |a|)|y - b| + |b||x - a|$
- (c) $|xy - ab| < (1 + |a|)|y - b| + |b|$, se $|x - a| < 1$.

23. Considerando o corpo ordenado dos reais, determine δ_1 e δ_2 tais que

$$|x - \sqrt{2}| < \delta_1 \text{ e } |y - \sqrt{3}| < \delta_2 \Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| < \varepsilon,$$

para $\varepsilon > 0$ dado. Sugestão: utilize o item (b) do exercício anterior.

24. Seja $A = \left\{ \frac{m+n}{m+n+1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Mostre que $\sup A = 1$ e que $\inf A = \frac{2}{3}$.
25. (Sel. Mestrado UFSM 2011/1) Considere o conjunto $X = \{1 - \frac{1}{3n^2} : n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\sup X = 1$.
26. Dados $A, B \in \mathbb{R}$ não vazios e limitados. Seja $A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$. Prove que:
- $A + B$ é limitado;
 - $\sup(A + B) = \sup A + \sup(B)$;
 - $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
27. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *limitada superiormente* se sua imagem $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$, for um subconjunto de \mathbb{R} limitado superiormente. Neste caso define-se o supremo de f , e denotamos por $\sup f$, como sendo o supremo do conjunto $f(X)$. Dadas duas funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, a soma $f + g$ é a função $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

- Prove que se $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são limitadas superiormente, então $f + g$ também é limitada superiormente, com

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g.$$

- Mostre com um exemplo que no item anterior a desigualdade pode ser estrita (Sugestão: tome $X = [-1, 1]$, $f(x) = x$ e $g(x) = -1$).
28. Para $A \subset \mathbb{R}$ limitado e não vazio e $c > 0$, definindo $c \cdot A = \{cx : x \in A\}$, prove que $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ e $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$.
29. Dados A e B subconjuntos de \mathbb{R}^+ limitados e não vazio, definindo $A \cdot B = \{xy : x \in A \text{ e } y \in B\}$, prove que $\sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$ e $\inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B)$.
30. Sejam A e B conjuntos não vazios de números reais e seja

$$\delta(A, B) = \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\},$$

chamado de “*distância*” entre os conjuntos A e B .

- Se $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, determine $\delta(A, B)$.
 - Se A e B forem conjuntos finitos, o quê $\delta(A, B)$ representa?
 - Seja $B = [0, 1]$. O quê a afirmação $\delta(\{x\}, B) = 0$ nos diz sobre o ponto x ?
 - Seja $B = (0, 1)$. O quê a afirmação $\delta(\{x\}, B) = 0$ nos diz sobre o ponto x ?
31. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios tais que, $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$. Mostre que $\sup A \leq \inf B$. Mostre que vale a igualdade se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.