**Universidade Federal de Pelotas**
**Curso de Licenciatura em Matemática**
**Disciplina de Introdução à Álgebra**
**Prof. Dr. Maurício Zahn**
**Lista 01 - Conjuntos e relações**

1. Construir possíveis diagramas de Venn:

   (a) de dois conjuntos $A$ e $B$ tais que $A \subset B$ e $A \neq B$;
   (b) dois conjuntos $A$ e $B$ *não comparáveis*[1].

2. Sejam $X$ e $Y$ dois conjuntos quaisquer de um universo $E$. Mostre que

   (a) $X \subset Y \Rightarrow \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$.
   (b) $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

3. Sabendo que $X$ é um conjunto qualquer de um espaço $E$, diga quais das sentenças abaixo são verdadeiras, justificando:

   (a) $X \in \mathcal{P}(X)$. (b) $X \subset \mathcal{P}(X)$. (c) $\{X\} \subset \mathcal{P}(X)$. (d) $\{X\} \in \mathcal{P}(X)$.

4. Desenhe um diagrama de Venn representando quatro conjuntos $A, B, C$ e $D$, não vazios, de modo que se tenha:
$$A \not\subset B,\ B \not\subset A,\ C \supset (A \cup B) \ \text{ e } \ D \subset (A \cap B).$$

5. Se $A$ e $B$ são conjuntos arbitrários, demonstre as seguintes propriedades, conhecidas como leis da absorção:

   (a) $A \cap (A \cup B) = A$; (b) $A \cup (A \cap B) = A$.

6. Demonstrar que $B - A$ é subconjunto de $A^{\complement}$.

7. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos tais que $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$. Prove que $B = C$.

8. Sejam $A, B \subset E$. Prove que $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $A \subset B^{\complement}$. Prove também que $A \cup B = E$ se, e somente se, $A^{\complement} \subset B$.

9. Sejam $A$ e $B$ subconjuntos do universo $E$. Prove que se $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = E$, então $B = A^{\complement}$ e $A = B^{\complement}$.

10. Seja $E$ o espaço fundamental e $A \subset E$. Prove que
$$A \Delta E = A^{\complement} \ \text{ e } \ A \Delta A^{\complement} = E.$$

11. Prove a propriedade da distributividade em relação à diferença simétrica:
$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

12. Demonstrar que para toda família $\{A_i : i \in I\}$, onde $I$ é um conjunto de índices, de um espaço fundamental $E$, tem-se as leis de De Morgan:

   (a) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\complement}$ (b) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcup_{i \in I} A_i^{\complement}$

[1] Dizemos que dois conjuntos $A$ e $B$ são *comparáveis* quando $A \subset B$ ou $B \subset A$. Eles são *não-comparáveis* quando $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$.

13. Demonstrar que

    (a) $\forall \lambda \in \Lambda,\ A_\lambda \subset B \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \lambda} A_\lambda \subset B.$

    (b) $\forall \lambda \in \Lambda,\ A_\lambda \subset B_\lambda \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$

14. Prove que $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

15. Sejam $L$ e $M$ conjuntos não vazios e considere, respectivamente, as famílias $(A_\ell)_{\ell \in L}$ e $(B_\mu)_{\mu \in M}$. Prove que

$$\left(\bigcap_{\ell \in L} A_\ell\right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\ell,\mu) \in L \times M} (A_\ell \cup B_\mu).$$

16. Sejam $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6\}$.

    (a) Enumere os elementos das seguintes relações de $A$ em $B$: $R_1 = \{(x, y) : y = x - 1\}$, $R_2 = \{(x, y) : x < y\}$, $R_3 = \{(x, y) : y = 3x\}$.

    (b) Estabeleça o domínio e a imagem de cada relação acima.

17. Dados $A = \{-1, 1, 2, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, represente graficamente a relação $R$ dada por

$$R = \{(x, y) \in A \times B\ : x \leq y\}$$

    no plano cartesiano e em diagramas com setas. Quais são o domínio e a imagem desta relação?

18. Sejam $R_1$ e $R_2$ duas relações binárias em $A$. Que significado tem $R_1 \cup R_2$ e $R_1 \cap R_2$? O que significa $R_1 \subset R_2$?

19. Seja $R = \{(x, y) |\, 4x^2 + y^2 = 4\}$ relação sobre $\mathbb{R}$.

    (a) Construa o gráfico cartesiano de $R$.

    (b) Determine $D(R)$ e $Im(R)$.

    (c) Descreva $R^{-1}$.

20. Seja $R$ a relação sobre $\mathbb{N}$ definida por $x + 3y = 10$. Determine:

    (a) os elementos de $R$;

    (b) o domínio e a imagem da relação $R$;

    (c) os elementos de $R^{-1}$.

21. O conjunto $E = \{a, b, c, d, e\}$ é formado pelos cinco filhos de um mesmo casal. Seja $R$ a relação sobre $E$ assim definida:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ é irmão de } y.$$

    Que propriedades $R$ apresenta?

**Obs.:** $x$ é irmão de $y$ quando $x \neq y$ e $x$ e $y$ têm os mesmos pais.

22. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e as seguintes relações sobre $A$:

$R_1 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3)\}$,
$R_2 = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3); (3, 3)\}$,
$R_3 = \{(1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3)\}$,
$R_4 = A \times A$.

Quais são reflexivas, simétricas, transitivas e anti-simétricas?

23. Prove que se uma relação $R$ em $A$ é transitiva, então $R^{-1}$ também é transitiva.

24. Sejam $R$ e $S$ duas relações em um conjunto $A$. Prove que:

(a) $R^{-1} \cap S^{-1} = (R \cap S)^{-1}$.
(b) $R^{-1} \cup S^{-1} = (R \cup S)^{-1}$.
(c) Se $R$ e $S$ são transitivas, então $R \cap S$ também é transitiva.
(d) $R \cup R^{-1}$ é simétrica.

25. Considere a relação $R$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d.$$

Prove que $R$ é uma relação de equivalência.

26. Quais das sentenças abaixo definem uma relação de equivalência?

(a) $x \equiv y \mod (n)$
(b) $x|y$
(c) $x \leq y$
(d) $\text{mdc}(x, y) = 1$
(e) $x + y = 7$
(f) paralelismo entre retas no plano.

27. Seja $E = \{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x \leq 5\}$ e seja $R$ a relação sobre $A$ definida por

$$xRy \Leftrightarrow x^2 + 2x = y^2 + 2y.$$

(a) Mostre que $R$ é uma relação de equivalência.
(b) Descreva as classes de equivalência $\overline{0}, \overline{-2}$ e $\overline{4}$.

28. Considere a relação $R$ sobre $\mathbb{C}$ definida por

$$(x + iy)R(z + it) \text{ se, e somente se, } x^2 + y^2 = z^2 + t^2,$$

com $x, y, z, t$ reais.

(a) Prove que $R$ é uma relação de equivalência.
(b) Descreva a classe $\overline{1 + i}$.

29. Mostre que a relação $R = \{(a + bi, c + di) : b = d\}$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{C}$ e descreva o conjunto quociente $\mathbb{C}/R$.

30. Mostre que a relação $T$ sobre $\mathbb{R}^2$ definida por

$$(x_1, y_1)T(x_2, y_2) \text{ se, e somente se, } x_1 - y_1 = x_2 - y_2$$

é uma relação de equivalência. A seguir, descreva $\overline{(1, 1)}$, $\overline{(1, 3)}$ e $\mathbb{R}^2/T$.

31. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexo e sejam $x = a + bi$ e $y = c + di$ em $\mathbb{C}$. Considere a relação $R$ sobre $\mathbb{C}$ definida por

$$xRy \Leftrightarrow a \leq c \text{ e } \ b \leq d.$$

(a) Mostre que $R$ é uma relação de ordem parcial sobre $\mathbb{C}$.

(b) Assinale no plano de Argand-Gauss o conjunto $A$ dos complexos $z$ tais que $zR(1 + 2i)$ e o conjunto $B$ dos complexos $z$ tais que $(1 + 2i)Rz$.

(c) Decida se $\mathbb{C}$ é totalmente ordenado por $R$ ou não.

32. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e sejam $x = a + bi$ e $y = c + di$ em $\mathbb{C}$. Considere a relação $T$ sobre $\mathbb{C}$ definida por

$$xTy \Leftrightarrow a \leq c \text{ e } \ b \leq d.$$

(a) Mostre que $T$ é uma relação de ordem parcial sobre $\mathbb{C}$.

(b) Assinale no plano de Argand-Gauss o conjunto $A$ dos complexos $z$ tais que $zT(1 + 2i)$ e o conjunto $B$ dos complexos $z$ tais que $(1 + 2i)Tz$.

(c) Decida se $\mathbb{C}$ é totalmente ordenado por $T$ ou não.

33. Prove que a relação $S$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(a, b)S(c, d) \Leftrightarrow a|c$ e $b|d$ é uma relação de ordem. A relação $S$ ordena totalmente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?