GABARITO OPT. GEOM. ESPACIAL

I.1: $V = 11$; $F_3 = F_4$; $F_5 = 1$.

Rel. de Euler:

$V + F - A = 2$.

$F = F_3 + F_4 + 1$. Como $F_3 = F_4$, vem:

$$\boxed{F = 2 \cdot F_3 + 1}$$

núm. de arestas: $2A = 3 \cdot F_3 + 4 F_4 + 5 \cdot F_5$.

$$2A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_3 + 5 \cdot 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{7 F_3 + 5}{2}$$

$$\Rightarrow V + F - A = 2$$

$$11 + 2F_3 + 1 - \frac{7 \cdot F_3 + 5}{2} = 2$$

$$22 + 4F_3 + 2 - 7F_3 - 5 = 4$$

$$3F_3 = 15 \Rightarrow \boxed{F_3 = 5}$$

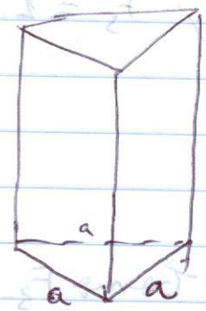
$$\Rightarrow F_4 = F_3 = 5$$

$$\Rightarrow F = 2F_3 + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 11.$$

2,0

Prof. Dr. Mauricio Zahn
IFM-DME-UFPel

I.2:



$h = 5\sqrt{3}$ cm

$A_\ell = A_b + 56\sqrt{3}$ cm^2

$A_\ell = 3a \cdot h = 15\sqrt{3} \cdot a$

BASE: TRIÂNGULO EQUILÁTERO DE LADO a | $A_b = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow A_\ell = A_b + 56\sqrt{3}$

$\Rightarrow 15\cancel{\sqrt{3}} \cdot a = \dfrac{a^2\cancel{\sqrt{3}}}{4} + 56\cancel{\sqrt{3}}$

2º

$\Rightarrow a^2 - 60a + 224 = 0$

$a = \dfrac{60 \pm \sqrt{3600 - 896}}{2 \cdot 1} = \dfrac{60 \pm 52}{2}$

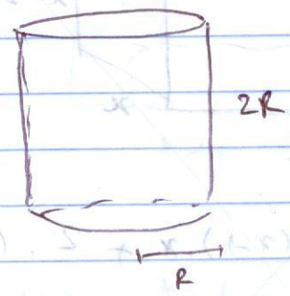
$\Rightarrow a = 56$ cm ou $a = 4$ cm.

Então,

$V = A_b \cdot h$
$= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 5\sqrt{3}$
$= \dfrac{4^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}}{4}$
$= 60$ cm^3

ou: $V = A_b \cdot h$
$= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 5\sqrt{3}$
$= \dfrac{(56)^2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}}{4}$
$= 11760$ cm^3

I - 3



seção meridiana:

$A_s = (2R)^2 = 4R^2$

$R = ?$

$V = A_b \cdot h = \pi R^2 2R$

$= 2\pi R^3 = ?$

$A_l = A_s + 4\pi$

$\Rightarrow 2\pi R \cdot (2R) = 4R^2 + 4\pi$

$4\pi R^2 - 4R^2 = 4\pi$

$\Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{4\pi}{4\pi - 4}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{\pi - 1}}$ cm.

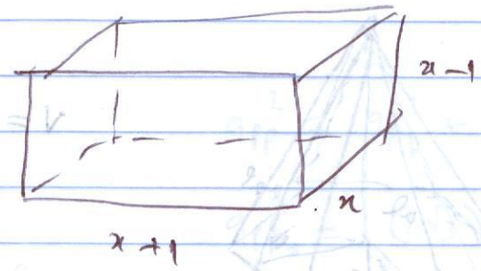
$\Rightarrow V = 2\pi R^3 = 2\pi \cdot \sqrt{\left(\dfrac{\pi}{\pi - 1}\right)^3} =$

$= 2\pi \dfrac{\pi}{\pi - 1} \cdot \sqrt{\dfrac{\pi}{\pi - 1}} = \dfrac{2\pi^2}{\pi - 1} \cdot \sqrt{\dfrac{\pi}{\pi - 1}}$ cm³

2,0

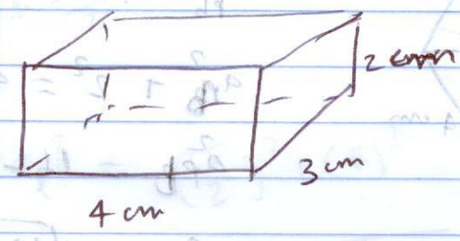
Prof. Dr. Mauricio Zahn
IFM-DME-UFPel

E4



$$x+1+x+x-1=9$$

$$3x=9 \Rightarrow x=3\text{ cm}$$ 0,2



TOTAL 1,0

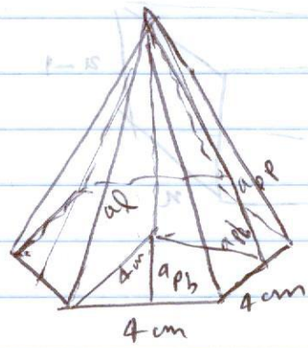
a) $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{16+9+4}$ 0,5

$=\sqrt{29}$ cm.

b) $V=a\cdot b\cdot c=4\cdot 3\cdot 2=24\text{ cm}^2$ 0,3

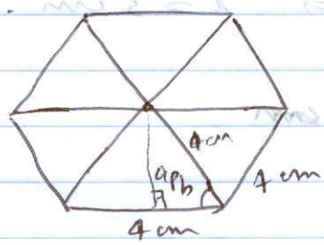
Prof. Dr. Mauricio Zahn
IFM-DME-UFPel

II.1)



$$V = 60\sqrt{3} = \frac{A_b \cdot h}{3} \quad (*)$$

BASE:



$a_{pb} = ?$

$a_{pb}^2 + 2^2 = 4^2$

$a_{pb}^2 = 16 - 4$

$a_{pb} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\,cm$

0,5

$$A_b = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}\,cm^2$$

0,5

$\Rightarrow$ De (*), vem:

$$\frac{24\sqrt{3} \cdot h}{3} = 60\sqrt{3}$$

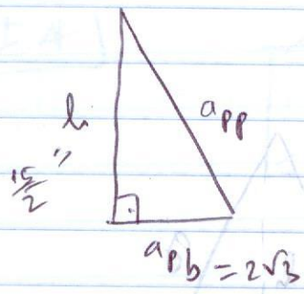
$$8h = 60 \Rightarrow h = \frac{60}{8} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}\,cm$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{15}{2}\,cm.}$$

0,5

$A_l = ?$ $\qquad A_l = 6 \cdot \frac{l \cdot a_{pp}}{2}$ ou

$A_l = P \cdot a_{pp}.$



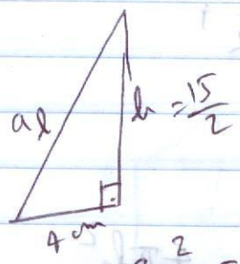
$$a_{pp}^2 = a_{pb}^2 + h^2$$

$$a_{pp}^2 = (2\sqrt{3})^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2$$

$$a_{pp}^2 = 12 + \frac{225}{4}$$

0,5

$$a_{pp} = \sqrt{\frac{273}{4}} = \frac{\sqrt{273}}{2} \text{ cm}$$



$$a_l^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + (4)^2$$

$$a_l = \sqrt{\frac{225}{4} + 16} = \sqrt{\frac{225+64}{4}} = \sqrt{\frac{289}{4}}$$

0,5

$$\boxed{a_l = \frac{17}{2} \text{ cm}}$$

$$A_l = p \cdot a_{pp} = 12 \cdot \frac{\sqrt{273}}{2} \text{ cm}^2$$

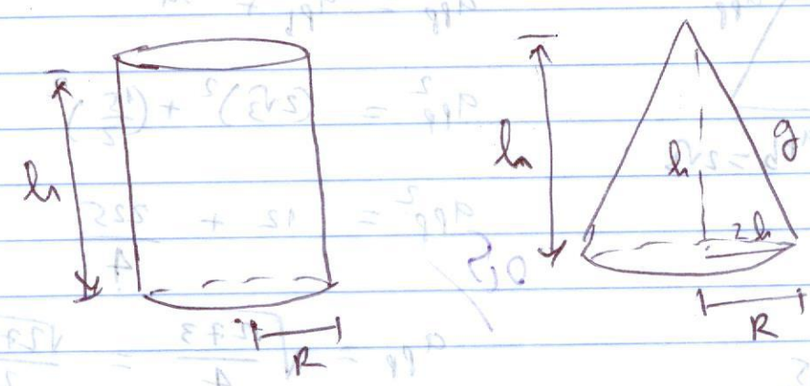
0,5

$$= \boxed{6\sqrt{273} \text{ cm}^2}$$

TOTAL: 3,0

II.2

2,0



$R = 2h.$

a)

$$A_{l\,cil} = 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot 2h \cdot h = 4\pi h^2$$

$A_{l\,cone} = \pi R g$; onde:

$$g^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow g = \sqrt{h^2 + (2h)^2}$$

$$\Rightarrow g = \sqrt{5h^2} = \sqrt{5} \cdot h.$$

$$\Rightarrow A_{l\,cone} = \pi \cdot R g = \pi \cdot 2h \cdot \sqrt{5}\, h = 2\pi\sqrt{5} h$$

2,0

$$\Rightarrow \frac{A_{l\,cil}}{A_{l\,cone}} = \frac{4\pi h^2}{2\pi\sqrt{5} h^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

1,0

0,5 + 0,5

b) $V_{cil} = A_b \cdot h = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot (2h)^2 h$

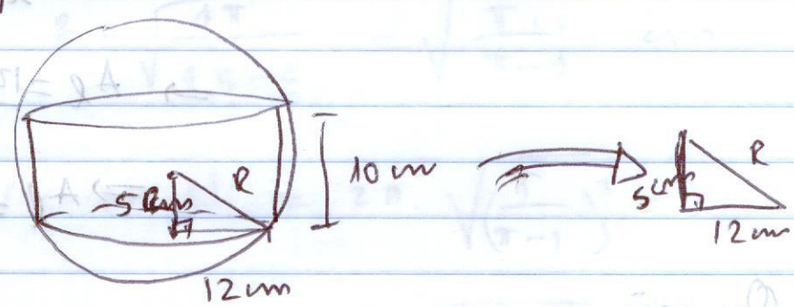
$= 4\pi h^3$

$V_{cone} = \dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot (2h)^2 \cdot h}{3}$

$= \dfrac{4\pi h^3}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{V_{cil}}{V_{cone}} = \dfrac{\cancel{4\pi h^3}}{\frac{\cancel{4\pi h^3}}{3}} = 3$

II.3



$R^2 = 5^2 + 12^2$

$R^2 = 25 + 144 \rightarrow R = \sqrt{169}$

$\Rightarrow R = 13\ cm$

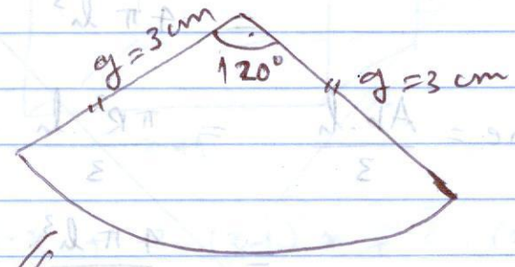
Assim:

$A = 4\pi R^2 = 4\pi (13)^2$

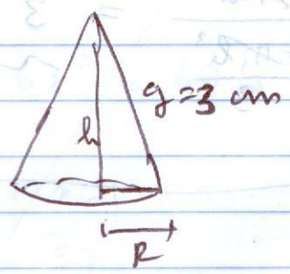
$= 676\pi\ cm^3$

NO

II.4



TOTAL: 2,5



$$360° \text{ ——— } \pi \cdot g^2$$
$$120° \text{ ——— } A_l$$

$$360° \cdot A_l = 120° \cdot \pi g^2$$

$$\Rightarrow A_l = \frac{12\pi g^2}{36}$$

$$\Rightarrow A_l = \frac{4\pi g^2}{9}$$ 0,5

Ou seja, $A_l = \frac{4\pi \cdot (3)^2}{9} = 4\pi \text{ cm}^2$

Mas: $A_l = \pi R \cdot g$

$$\Rightarrow 4\pi = \pi R \cdot 3 \Rightarrow \boxed{R = \frac{4}{3} \text{ cm}}$$ 0,5

0,1 Assim:

$$A_T = A_l + A_b = \pi R g + \pi R^2$$
$$= \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 + \pi \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 4\pi + \frac{16}{9}\pi$$
$$= \frac{52\pi}{9} \text{ cm}^2$$ 0,5

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática
Prova Optativa de Geometria Espacial
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 01/03/2018

—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o

Instruções. Escolha 2 questões da **PARTE I e** 3 questões da **PARTE II** para resolver, assinalando com um "**x**" no espaço [ ]. A nota da prova é definida por:

$$\text{Nota} = \frac{\text{soma de acertos} \times 10,0}{\text{soma de pontos escolhidos}}$$

Esta Prova pode substituir a nota mais baixa (e somente uma) entre as duas provas semestrais.

—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o

PARTE I

[ ] **Questão I.1.** **(2,0 pt)** Um poliedro convexo tem 11 vértices, o número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares e uma face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro.

[ ] **Questão I.2.** **(2,0 pt)** Calcule o volume de um prisma triangular regular de $5\sqrt{3}$ cm de altura, sabendo que a área lateral excede a área da base em $56\sqrt{3}$ cm^2.

[ ] **Questão I.3.** **(2,0 pt)** Sabendo que a área lateral excede em 4π cm^2 a área da seção meridiana de um cilindro equilátero, determine a medida do seu raio e o volume do cilindro.

[ ] **Questão I.4.** **(1,0 pt)** As dimensões de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma das medidas das três arestas mede 9 cm, determine:

(a) a medida da diagonal desse paralelepípedo;

(b) o volume do paralelepípedo.

PARTE II

[ ] **Questão II.1.** **(3,0 pt)** O volume de uma pirâmide regular hexagonal é $60\sqrt{3}$ cm^3, sendo 4 cm o lado do hexágono. Calcule as medidas da altura, aresta lateral e o apótema da pirâmide. Determine também a medida da área lateral dessa pirâmide.

[ ] **Questão II.2.** **(2,0 pt)** Um cilindro e um cone têm altura h e raio da base R. Sendo $R = 2h$, determine a razão entre:

(a) a área lateral do cilindro e a área lateral do cone;

(b) o volume do cilindro e o volume do cone.

[ ] **Questão II.3.** **(1,0 pt)** Um cilindro de revolução de altura 10 cm e raio da base 12 cm está inscrito em uma esfera. Calcule a área da superfície esférica e o volume da esfera.

[ ] **Questão II.4.** **(2,5 pt)** Com um setor circular de 120° e raio 3 cm construímos um cone. Calcule a área total e o volume desse cone.

[ ] **Questão II.5.** **(1,0 pt)** A área de uma seção plana de uma esfera é 144π cm^2. Determine o volume dessa esfera, sabendo que esta seção equidista 5 cm do centro da esfera.