Maurício Zahn.

Análise Real I

Ave, Regina Cælorum,
Ave, Domina Angelorum:
Salve, radix, salve, porta
Ex qua mundo lux est orta:
Gaude, Virgo gloriosa,
Super omnes speciosa,
Vale, o valde decora,
Et pro nobis Christum exora.

Prefácio

Material do curso de Análise Real I de 2018/01.

Prof. Maurício Zahn
UFPel - DME - IFM

Conteúdo

Capítulo 1

Conjuntos e funções

"A Matemática é a chave de ouro, com que podemos abrir todas as ciências."

Victor Duruy.

Neste primeiro capítulo, revisaremos alguns fatos principais sobre conjuntos e funções que serão necessários para o estudo qda Análise.

1.1 Conjuntos e operações

Não definimos o que vem a ser um *conjunto*. É simplesmente um sinônimo para uma coleção de elementos.

Para relacionar conjunto com elemento, usamos a relação de *pertinência*, anotada pelo símbolo $\in$. Os elementos de um conjunto são representados, normalmente, por letras minúsculas de nosso alfabeto e os conjuntos são normalmente representados por letras maiúsculas de nosso alfabeto. Assim, para dizer que um elemento x **pertence** a um conjunto A, escrevemos $x \in A$ e para dizer que um elemento y **não pertence** ao conjunto A, escrevemos $y \notin A$.

Uma maneira de expressar um conjunto X é dizendo qual a regra que decide se um dado elemento pertence ou não pertence ao referido conjunto. Por exemplo, seja X o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 2 cuja diagonal principal não tem zeros. Desta maneira, temos que

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in X\,, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \in X;\ \text{mas,}\ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin X.$$

Uma maneira simples de representar o conjunto X dado acima é

$$X = \{A = (a_{ij})_{2\times 2}\ :\ a_{kk} \neq 0\}.$$

De maneira geral, dado X um conjunto qualquer cujos elementos de X satisfazem uma propriedade p, escrevemos

$$X = \{x\colon\ x\ \text{satisfaz propriedade}\ p\}.$$

Utilizaremos os símbolos clássicos para denotar os conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$ para o conjunto dos naturais, $\mathbb{Z}$ para o conjunto dos inteiros, $\mathbb{Q}$ para o conjunto dos racionais, $\mathbb{I}$ para o conjunto dos números irracionais, $\mathbb{R}$ para o conjunto dos números reais e $\mathbb{C}$ para o conjunto dos números complexos.

O conjuntos de todos os conjuntos que ocorrem numa dada discussão é chamado de *conjunto universo* ou *espaço fundamental* E.

Na teoria dos conjuntos, também é importante a noção de *conjunto vazio.* O conjunto vazio é o conjunto que não possui elementos. Ele é representado pelo símbolo $\emptyset$ ou por $\{\}$. O conjunto vazio aparece em diversos contextos, como por exemplo,

$$\emptyset = \{n \in \mathbb{N}\ :\ n \neq n\}.$$

É importante observar que não se deve confundir $\emptyset$ com $\{\emptyset\}$. O primeiro trata-se do conjunto vazio e, portanto, não tem elemento algum; já o segundo é um conjunto que possui um elemento: o conjunto vazio.

Para relacionar conjuntos usamos o símbolo de *contenção* $\subset$, c.f. a definição abaixo.

Definição 1.1 Sejam A e B dois conjuntos em um universo E. Dizemos que A *está contido* em B, e escreveremos $A \subset B$, se todo elemento de A for elemento de B. Mais precisamente,

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E)\,[x \in A \Rightarrow x \in B]\,.$$

Quando $A \subset B$, dizemos que A é um *subconjunto* ou *parte* de B.

Para dizer que A **não está contido** em B, basta exibir um elemento de A que não esteja em B, ou seja,

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists\, x_0 \in A), \text{ tal que } \; [x_0 \notin B].$$

Uma propriedade que segue imediatamente da definição de contenção é a descrita na proposição a seguir.

Proposição 1.2 *O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.*

Demonstração. Seja A um conjunto qualquer em um universo E. Por absurdo, suponhamos que $\emptyset \not\subset A$. Assim, $\exists\, x_0 \in \emptyset$ tal que $x_0 \notin A$. Mas, $x_0 \in \emptyset$ é um absurdo, pois viola a definição de conjunto vazio. Portanto, $\emptyset \subset A$, qualquer que seja o conjunto A.

□

A seguir, definimos a igualdade de conjuntos.

Definição 1.3 Dizemos que dois conjuntos A e B em um universo E são *iguais* se todo elemento de A for elemento de B e todo elemento de B for elemento de A. Mais precisamente,

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

Proposição 1.4 *Sejam A, B e C conjuntos em um universo E. Então, valem as seguintes propriedades para a contenção de conjuntos:*

(i) *reflexiva: $A \subset A$;*

(ii) *antissimétrica: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;*

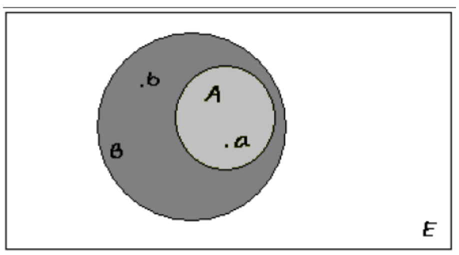
(iii) *transitiva: se* $A \subset B$ *e* $B \subset C$*, então* $A \subset C$.

Demonstração. Sejam A, B e C conjuntos em um universo E. Mostramos cada item da proposição acima.
(i) Reflexiva: $A \subset A$. De fato, dado $x \in A$ um elemento qualquer em A, segue, por repetição, que $x \in A$. Portanto, $A \subset A$, ou seja, segue a reflexividade.
(ii) Antissimétrica: segue diretamente da definição 1.3 de igualdade de conjuntos dada acima.
(iii) Transitiva: Sejam A, B e C em E, tais que $A \subset B$ e $B \subset C$. Como $A \subset B$, segue que dado um $x \in A$, implica que $x \in B$. Porém, como $B \subset C$, segue que $x \in C$. Como esse x é um elemento qualquer em A, temos provado que $A \subset C$ e a prova da transitividade está completa.

□

Definição 1.5 Chama-se *diagrama de Venn* toda figura fechada usada para representar graficamente um conjunto, onde os elementos no interior da figura serão elementos pertencentes ao dado conjunto e os elementos fora da figura serão elementos não pertencentes ao conjunto em questão.

Apresentamos a seguir, em diagramas de Venn, uma representação para ilustrar $A \subset B$. Note que o retângulo que os contêm também é um diagrama de Venn, e está representando o conjunto universo E. Também destacamos dois elementos a e b, onde $a \in A$ e $b \notin A$, mas $b \in B$.



Definição 1.6 Seja X um conjunto qualquer em um universo E. Definimos o *conjunto das partes de* X, e denotamos por $\mathcal{P}(X)$, o conjunto

$$\mathcal{P}(X) = \{A \in E \,:\, A \subset X\}.$$

Em outras palavras, o conjunto $\mathcal{P}(X)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto X.

Da definição acima, temos que $A \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow A \subset X$.

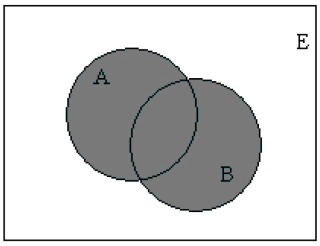
Observe que $\mathcal{P}(X)$ está bem definido. Realmente, como pela proposição 1.2 temos que $\emptyset \subset X$, e pela reflexividade da contenção temos $X \subset X$, segue que $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ e $X \in \mathcal{P}(X)$. Logo, o conjunto das partes de um conjunto sempre possui pelo menos dois elementos: o conjunto vazio e o próprio conjunto.

A seguir, apresentamos as principais operações entre conjuntos, bem como suas propriedades.

Definição 1.7 Sejam A e B conjuntos de um universo E. Definimos a *união* entre A e B, e anotamos por $A \cup B$, o conjunto dos elementos de E que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos. Mais precisamente,

$$A \cup B = \{x \in E \,:\, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

A seguir, temos uma representação em diagrama de Venn, onde a parte sombreada ilustra $A \cup B$.



Para mostrar que um dado elemento não está na união entre A e B, é preciso mostrar que esse elemento não está em nenhum deles, ou seja,

$$x_0 \notin A \cup B \Leftrightarrow x_0 \notin A \text{ e } x_0 \notin B.$$

Proposição 1.8 *Sejam A e B conjuntos em E. Então, $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$.*

Demonstração. Faremos apenas a prova da primeira contenção, visto que a outra é análoga. Por absurdo, se $A \not\subset A \cup B$, então, $\exists\, x_0 \in A$ tal que $x_0 \notin A \cup B$.

Mas então $x_0 \notin A$ e $x_0 \notin B$. Logo, $x_0 \in A$ e $x_0 \notin A$. Absurdo! Portanto, $A \subset A \cup B$.

□

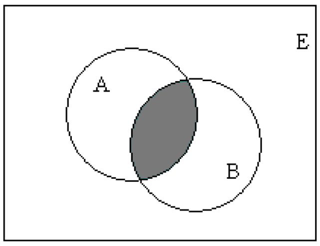
Definição 1.9 Chama-se *interseção* entre dois conjuntos A e B, e escrevemos $A \cap B$, ao conjunto dos elementos comuns a A e a B. Mais precisamente,

$$A \cap B = \{x \in E \ : \ x \in A \ \text{ e } \ x \in B\}.$$

Da definição acima, temos que para um elemento não pertencer à interseção, basta ele não pertencer a pelo menos um dos conjuntos, ou seja,

$$x_0 \notin A \cap B \Leftrightarrow x_0 \notin A \ \text{ ou } \ x_0 \notin B.$$

A seguir, temos uma representação em diagramas de Venn para $A \cap B$, que encontra-se sombreada.



Deixaremos para o leitor a prova da proposição seguinte.

Proposição 1.10 *Sejam A e B conjuntos em um universo E. Então, $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.*

A seguir, apresentamos as principais propriedades envolvendo a união e a intersecção de conjuntos.

Proposição 1.11 *Sejam A, B, C, M e N conjuntos em um universo E. Valem as seguintes propriedades:*

(a) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

(b) $A \cup \emptyset = A$*;* $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(c) $A \cup B = B \cup A$*;* $A \cap B = B \cap A$ *(comutatividades).*

(d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$*;* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
(associatividades da união e da intersecção)

(e) Se $A \subset B$ *e* $M \subset N$*, então* $A \cup M \subset B \cup N$.
Se $A \subset B$ *e* $M \subset N$*, então* $A \cap M \subset B \cap N$.
(monotonicidades da união e da intersecção em relação à contenção)

(f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$*;* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
(distributividades)

Demonstração. Faremos a demonstração de algumas, deixando as demais para o leitor.
(a) Mostraremos que $A \cup A = A$. Para provar esta igualdade, precisamos provar duas contenções: $A \cup A \subset A$ e $A \subset A \cap A$. Faremos isto em duas afirmações.
Af 01. $A \subset A \cup A$: segue diretamente pela proposição 1.8.

Af 02. $A \cup A \subset A$: por absurdo, suponhamos que $A \cup A \not\subset A$. Assim, segue que $\exists\, x_0 \in A \cup A$, tal que $x_0 \notin A$. Mas de $x_0 \in A \cup A$, segue que $x_0 \in A$. Logo, $x_0 \in A$ e $x_0 \notin A$. Absurdo! Portanto, $A \cup A \subset A$.
Pelas afirmações 01 e 02, segue o resultado.

(c) Mostraremos $A \cap B = B \cap A$, i.e., a comutatividade da intersecção.
Af 01. $A \cap B \subset B \cap A$:
Dado $x \in A \cap B$, segue que $x \in A$ e $x \in B$, ou seja, $x \in B$ e $x \in A$ e, portanto, $x \in B \cap A$.

Af 02. $B \cap A \subset A \cap B$: prova-se analogamente.

Portanto, vale a comutatividade da intersecção.

(e) Provaremos que $A \subset B$ e $M \subset N \Rightarrow A \cup M \subset B \cup N$.
Suponhamos que $A \subset B$ e $M \subset N$. Precisamos mostrar que $A \cup M \subset B \cup N$.

Para tanto, basta mostrar que dado um elemento no primeiro conjunto, este deve estar no segundo. Assim, seja $x_0 \in A \cup M$. Logo, $x_0 \in A \subset B$ ou $x_0 \in M \subset B$ (as contenções são devidas às hipóteses). Logo, temos $x_0 \in B \cup N$, o que prova o que queríamos.

(f) Provaremos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Af 01. $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$:
Seja $x_0 \in A \cup (B \cap C)$. Assim, $x_0 \in A$ ou $x_0 \in B \cap C$.
Se $x_0 \in A$, pela proposição 1.8, temos que $x_0 \in A \subset A \cup B$ e também $x_0 \in A \cup C$. Portanto, $x_0 \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e vale a afirmação 01. Por outro lado, se $x_0 \in B \cap C$, segue que $x_0 \in B \subset B \cup C$ e $x_0 \in C \subset A \cup C$ e, portanto, $x_0 \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e vale a afirmação 01.
Af 02. $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$:
Por absurdo, suponhamos que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \not\subset A \cup (B \cap C)$. Assim, $\exists x_0 \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ tal que $x_0 \notin A \cup (B \cap C)$. Assim,

$$x_0 \in A \cup B \text{ e } x_0 \in A \cup C \tag{1.1}$$

Como $x_0 \notin A \cup (B \cap C)$, segue que

$$x_0 \notin A \text{ e } x_0 \notin B \cap C \tag{1.2}$$

Por (6.5) e (6.6), temos

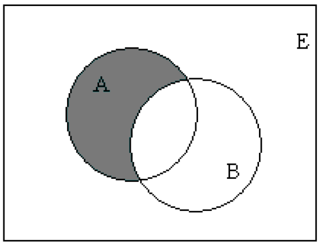
$$x_0 \in B \text{ e } x_0 \in C \Rightarrow x_0 \in B \cap C$$

Mas isto é um absurdo, pois contradiz (6.6).
Logo, vale a afirmação 02.
As afirmações 01 e 02 provam a igualdade requerida.

□

Definição 1.12 Sejam A e B conjuntos não vazios em um universo E. Definimos a *diferença* entre A e B, e escrevemos $A \setminus B$ ou $A - B$, por

$$A \setminus B = \{x \in E : x \in A \text{ e } \ x \notin B\}.$$



Em outras palavras, a diferença $A \setminus B$ é o conjunto dos elementos de A que não estão em B. Abaixo, temos uma representação em diagrama de Venn, onde $A \setminus B$ está sombreado.

Convém observar que a operação de diferença entre conjuntos não é comutativa, ou seja, em geral, $A \setminus B \neq B \setminus A$. Deixamos para o leitor a confirmação deste fato.

Quando $B \subset A$, a diferença entre A e B, é chamada de *complementar de B em relação a A*, e escrevemos

$$\complement_A B = A \setminus B.$$

Neste caso, se considerarmos A como sendo o conjunto universo, temos a definição que segue.

Definição 1.13 Seja B um conjunto qualquer em um universo E. Definimos o *complementar de B,* e escrevemos $B^{\complement}$, como o conjunto de todos os elementos que estão fora de B, ou seja,

$$B^{\complement} = \complement_E B = E \setminus B = \{x \in E \,:\, x \notin B\}.$$

Na proposição abaixo, apresentamos as principais propriedades do complementar de um conjunto.

Proposição 1.14 *Sejam A e B dois conjuntos em um universo E. Então, valem as seguintes propriedades:*

(a) $A \cup A^{\complement} = E$*;* $A \cap A^{\complement} = \emptyset$*.*

(b) $(A^{\complement})^{\complement} = A$ *(idempotência).*

(c) $A \subset B \Leftrightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}$.

(d) $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$; $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$. *(leis de De Morgan).*

(e) $A = \emptyset \Leftrightarrow A^{\complement} = E$.

Demonstração.
(a) Mostraremos que $A \cup A^{\complement} = E$.
Note que $A \cup A^{\complement} \subset E$ é óbvio, c.f. a definição de espaço fundamental. Resta mostrar que $E \subset A \cup A^{\complement}$.
Por absurdo, se $E \not\subset A \cup A^{\complement}$, segue que $\exists x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin A \cup A^{\complement}$. Então, $x_0 \notin A$ e $x_0 \notin A^{\complement}$. Mas, $x_0 \notin A^{\complement} \Rightarrow x_0 \in A^{\complement}$. Absurdo. Logo, $E \subset A \cap A^{\complement}$.
Portanto, vale que $A \cup A^{\complement} = E$.

(b) Podemos provar as duas contenções simultaneamente:

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin A^{\complement} \Leftrightarrow x \in (A^{\complement})^{\complement}.$$

(c) Suponhamos que $A \subset B$. Precisamos mostrar que $B^{\complement} \subset A^{\complement}$. Dado $x_0 \in B^{\complement}$, temos que $x_0 \notin B$. Como $A \subset B$, segue que $x_0 \notin A$, ou seja, $x_0 \in A^{\complement}$. Logo, $B^{\complement} \subset A^{\complement}$.
Reciprocamente, suponhamos que $B^{\complement} \subset A^{\complement}$. Mostraremos que $A \subset B$. Por absurdo, se $A \not\subset B$, então, $\exists x_0 \in A$ tal que $x_0 \notin B$. Mas $x_0 \notin B$ equivale a $x_0 \in B^{\complement}$. Assim, pela hipótese de que $B^{\complement} \subset A^{\complement}$, segue que $x_0 \in A^{\complement}$, ou seja, $x_0 \notin A$. Mas isto é um absurdo, pois $x_0 \in A$. Logo, $A \subset B$.
Isto conclui a prova desta propriedade.

(d) Mostraremos que $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$. Podemos provar as duas contenções simultaneamente:

$$x_0 \in (A \cup B)^{\complement} \Leftrightarrow x_0 \notin A \cup B \Leftrightarrow x_0 \notin A \ \text{ e } \ x_0 \notin B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in A^{\complement} \ \text{ e } \ x_0 \in B^{\complement} \Leftrightarrow x_0 \in A^{\complement} \cap B^{\complement}.$$

A demonstração da outra lei de De Morgan é análoga a esta. Fica como exercício.

(e) Suponhamos que $A = \emptyset$.
Af 1: $A^{\complement} \subset E$. De fato, esta contenção é trivial, pois qualquer conjunto é subconjunto de E, uma vez que E é o espaço fundamental. Logo, vale a afirmação 1.
Af 2: $E \subset A^{\complement}$. Por absurdo, se $E \not\subset A^{\complement}$, segue que $\exists x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin A^{\complement}$, ou seja, $x_0 \in A = \emptyset \Rightarrow x_0 \in \emptyset$, mas isto é um absurdo, pois viola a definição de vazio. Logo, vale a afirmação 2. Estas duas afirmações provam que $A^{\complement} = E$.
Reciprocamente, suponhamos que $A^{\complement} = E$. Precisamos mostrar que $A = \emptyset$. Por absurdo, se $A \neq \emptyset$, segue que $\exists x_0 \in A$, tal que $x_0 \notin \emptyset$ (o que é óbvio!). Mas $x_0 \in A$, então $x_0 \notin A^{\complement} = E$. Mas isto é um absurdo, pois E é o espaço fundamental. Logo, vale que $A = \emptyset$.

$\square$

A proposição que se segue estabelece outra forma de representar diferença de conjuntos, ligando-os com a noção de complementar.

Proposição 1.15 Sejam A e B conjuntos de um espaço E. Vale a igualdade

$$A - B = A \cap B^{\complement}$$

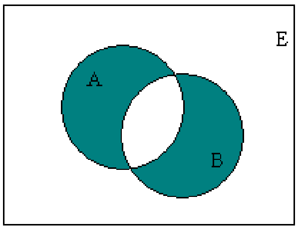
Demonstração. Fica como exercício.

Definição 1.16 Sejam A e B dois conjuntos. definimos a *diferença simétrica* entre A e B e escrevemos $A\Delta B$, ao conjunto

$$A\Delta B = \{x : (x \in A \text{ e } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \notin A)\} = (A - B) \cup (B - A).$$

Em outras palavras: definimos a diferença simétrica entre dois conjuntos como sendo o conjunto dos elementos que *não são comuns* a ambos.

Em diagramas de Venn, temos $A\Delta B$ hachurado:



Proposição 1.17 A diferença simétrica é uma operação comutativa.

Demonstração. Sejam A e B dois conjuntos em E. Vamos mostrar que $A\Delta B = B\Delta A$. De fato, basta notar que, tendo em vista a comutatividade da união, temos

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B\Delta A.$$

$\square$

Proposição 1.18 Sejam A e B conjuntos de um espaço E. Vale a igualdade

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Demonstração. Utilizando-se das propriedades de conjuntos até então apresentadas, temos

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^{\complement}) \cup (B \cap A^{\complement}) =$$

$$= \Big((A \cap B^{\complement}) \cup B\Big) \cap \Big((A \cap B^{\complement}) \cup A^{\complement}\Big) =$$

$$= \Big((A \cup B) \cap (B^{\complement} \cup B)\Big) \cap \Big((A \cup A^{\complement}) \cap (B^{\complement} \cup A^{\complement})\Big) =$$

$$= ((A \cup B) \cap E) \cap (E \cap (B^{\complement} \cup A^{\complement})) = (A \cup B) \cap (B^{\complement} \cup A^{\complement}) =$$

$$= (A \cup B) \cap (B \cap A)^{\complement} = (A \cup B) - (A \cap B).$$

$\square$

1.2 Produto cartesiano

Nesta seção apresentemos a definição de produto cartesiano, bem como algumas propriedades.

Definição 1.19 Sejam A e B dois conjuntos não vazios em E. Definimos o *produto cartesiano* ou *direto* entre A e B, e denotamos por $A \times B$, como

$$A \times B = \{(a, b) \, : \, a \in A \ \text{ e } \ b \in B\}.$$

Os elementos $(a, b) \in A \times B$ são chamados de *pares ordenados*. Note que, em geral, $A \times B \neq B \times A$, i.e., o produto cartesiano não é comutativo. Por exemplo, sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5\}$. Temos

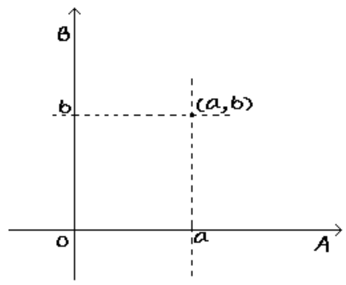
$$A \times B = \{(1, 2); (1, 5); (2, 2); (2, 5); (3, 2); (3, 5)\}$$

e

$$B \times A = \{(2, 1); (2, 2); (2, 3); (5, 1); (5, 2); (5, 3)\}.$$

Nitidamente, percebemos que $A \times B \neq B \times A$ pois, por exemplo, $(1, 2) \in A \times B$, mas $(1, 2) \notin B \times A$.

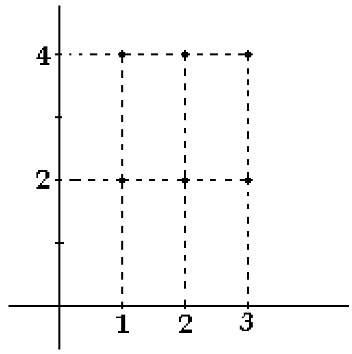
Para representar graficamente $A \times B$, procedemos da seguinte maneira: traçamos duas retas perpendiculares entre si, uma horizontal e outra vertical, fazendo coincidir suas origens. Na reta horizontal, marcamos os elementos $a \in A$ e na vertical, os elementos $b \in B$. Tracejamos uma linha vertical passando por $a \in A$, e uma linha horizontal passando por $b \in B$. O encontro dessas duas nos dará a localização de $(a, b) \in A \times B$, na qual demarcamos com um ponto. Esta representação chama-se *representação no plano cartesiano*.



Considerando $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$, temos

$$A \times B = \{(1, 2); (1, 4); (2, 2); (2, 4); (3, 2); (3, 4)\}$$

e sua representação gráfica no plano cartesiano é apresentada na figura abaixo.



Proposição 1.20 *Sejam A, B e C conjuntos não vazios em um universo E. O produto cartesiano goza das seguintes propriedades:*

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

(c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Demonstração. Faremos apenas a demonstração da primeira e deixaremos as demais para o leitor.

Queremos mostrar que $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$. Faremos isto provando duas contenções, c.f. as afirmações abaixo.

Af 01. $(A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C)$:
Dado $(x, y) \in (A \cup B) \times C$. Logo, pela definição de produto cartesiano, temos que $x \in A \cup B$ e $y \in C$. Pela definição de união de conjuntos, segue que $x \in A$ ou $x \in B$ e, ainda, temos $y \in C$. Portanto, $x \in A$ e $y \in C$ ou $x \in B$ e $y \in C$, i.e., $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$, ou seja, $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.
Logo, vale a afirmação 01.

Af 02. $(A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C$:
Dado $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Então, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$, i.e., $x \in A$ e $y \in C$ ou $x \in B$ e $y \in C$, mas isto é o mesmo que $x \in A$ ou $x \in B$ e $y \in C$, ou seja, $x \in A \cup B$ e $y \in C$, i.e., $(x, y) \in (A \cup B) \times C$. Logo, vale a afirmação 2.
Pelas afirmações 01 e 02, segue o resultado.

$\square$

1.3 Família de conjuntos

Nesta seção vamos apresentar o conceito de família de conjuntos, bem como suas principais propriedades.

Definição 1.21 Seja Λ um conjunto cujos elementos $\lambda \in \Lambda$ são chamados de *índices* e suponha que $\forall\lambda \in \Lambda$, $\exists\, A_\lambda$, conjunto que depende o índice λ.
O conjunto de todos os A_λ, onde $\lambda \in \Lambda$, chama-se uma *família de conjuntos* indexada por λ, e denotamos por

$$\mathfrak{F} = (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = \{A_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}.$$

O caso mais simples de família indexada é quando $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$.

Exemplo. Defina a família $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$F_n = \{k \in \mathbb{Z} \,:\, k^2 \leq n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Fazendo n variar no conjunto dos números naturais vamos determinando os conjuntos F_n da família indexada por n:

- $n = 1$: $F_1 = \{k \in \mathbb{Z} : k^2 \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$.
- $n = 2$: $F_2 = \{k \in \mathbb{Z} : k^2 \leq 2\} = \{-1, 0, 1\} = F_1$.
- $n = 3$: $F_3 = \{k \in \mathbb{Z} : k^2 \leq 3\} = \{-1, 0, 1\} = F_1 = F_2$.
- $n = 4$: $F_4 = \{k \in \mathbb{Z} : k^2 \leq 4\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$$\vdots$$

- $n = 20$: $F_{20} = \{k \in \mathbb{N} : k^2 \leq 20\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

$$\vdots$$

Aproveitando o exemplo dado acima, perguntamos: seria possível fazer a união de todos os elementos da família dada? e a intersecção? Isto nos motiva a apresentar a definição que segue, que generaliza o conceito de união e intersecção de conjuntos.

Definição 1.22 Seja Λ um conjunto de índices λ e considere $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos indexada por $\lambda \in \Lambda$.
Definimos a *união* e a *intersecção* dos elementos desta família, respectivamente, por

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in A_\lambda, \text{para} \quad \text{algum} \ \ \lambda \in \Lambda\}$$

e

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in A_\lambda, \, \forall \lambda \in \Lambda\}$$

Da definição acima observamos que

$$x_0 \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow x_0 \notin A_\lambda, \, \forall \lambda \in \Lambda$$

e

$$x_0 \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow x_0 \notin A_{\lambda_0}, \ \ \text{para algum} \ \ \lambda_0 \in \Lambda.$$

Como aplicação dessa definição vejamos um interessante exemplo.

Exemplo. Seja $\Lambda = \mathbb{N}$ e defina a família $\mathfrak{F} = (A_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}}$ por

$$A_\lambda = \{x \in \mathbb{Z} : x > \lambda\}.$$

Então, temos os conjuntos

- $A_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x > 1\} = \{2, 3, 4, ...\}$
- $A_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x > 2\} = \{3, 4, 5, ...\}$

$$\vdots$$

- $A_n = \{x \in \mathbb{Z} : x > n\} = \{n + 1, n + 2, ...\}$

$$\vdots$$

Vamos determinar $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda$ e $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda$.

É fácil ver que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$, e então

$$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda = A_1 = \{2, 3, 4, ...\}.$$

Mas o que resulta em $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda$? Essa interseção não é tão imediata de se obter, neste caso. Como $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$, então, fixando $n > 1$ temos

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \{n, n + 1, ...\},$$

o que nos faz pensar de que a interseção infinita $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda$ possuirá também infinitos elementos. No entanto, e o que poderá "chocar" o leitor, é afirmar que essa interseção infinita será vazia!

Ou seja, afirmamos que

$$\bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda = \emptyset. \tag{1.3}$$

De fato, como $\emptyset \subset \bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda$, é suficiente mostrar que $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda \subset \emptyset$.

E, como tal afirmação é "forte demais", vamos provar por absurdo.

Por absurdo, suponha que $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda \not\subset \emptyset$. Então, $\exists\, x_0 \in \bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda$ tal que $x_0 \notin \emptyset$ (o que é óbvio!).

Assim, sendo x_0 um número inteiro, defina o índice $\lambda_0 = |x_0| + 1 \in \mathbb{N}$. E, como $x_0 \in \bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda$, em particular tem-se que

$$x_0 \in A_{\lambda_0} = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x > \lambda_0\},$$

mas então teríamos $x_0 > |x_0| + 1$, o que é um absurdo! Portanto, $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda \subset \emptyset$, donde segue (1.3).

A seguir apresentamos algumas propriedades envolvendo famílias de conjuntos.

Proposição 1.23 *Sejam A um conjunto qualquer num universo E e $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos indexada por $\lambda \in \Lambda$, também definida em E. Então, valem as igualdades:*

(a) $A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda)$;

(b) $A \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \cup B_\lambda)$

(c) $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right)^{\complement} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda^{\complement}$;

(d) $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right)^{\complement} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda^{\complement}$

Obs.: Note que as igualdades (a) e (b) são extensões das distributividades da intersecção e da união, e as igualdades (c) e (d) são extensões das leis de De Morgan.

Demonstração. Faremos apenas as provas (a) e de (c), deixando as outras duas a encargo do leitor.
(a)
Af 01. $A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda)$:
Dado $x \in A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right)$, segue que $x \in A$ e $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$. Logo, temos que $x \in A$ e $x \in B_\lambda$, para algum $\lambda \in \Lambda$.
Portanto $x \in A \cap B_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A \cap B_\lambda$, e então vale a afirmação 01.

Af 02. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda) \subset A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right)$:
Dado $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda)$, segue que $\exists\, \lambda \in \Lambda$ tal que $x \in A \cap B_\lambda$ e então $x \in A$ e $x \in B_\lambda$, para algum $\lambda \in \Lambda$. Portanto, temos que $x \in A$ e $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, ou seja, $x \in A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right)$, e então vale a afirmação 02.
Pelas afirmações 01 e 02 segue a primeira igualdade de (a).

(c) Neste caso podemos provar as duas contenções simultaneamente como segue:

$$x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right)^{\complement} \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \Leftrightarrow x \notin B_\lambda,\ \forall \lambda \in \Lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in B_\lambda^{\complement},\ \forall \lambda \in \Lambda \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda^{\complement}.$$

Isto conclui a prova da proposição.

$\square$

1.4 Funções

Definição 1.24 Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chama-se *função* $f : A \to B$ a regra f que leva **todos** elementos de A **a** elementos de B de maneira **única**.

Obs.: $f : A \to B$ é lido como: "f é a função de A em B."

Usaremos os seguintes termos como sinônimos para nos referirmos à função: *função*, *aplicação* ou *transformação*.

Definição 1.25 Dada uma função $f : A \to B$, chamamos A de *domínio* da f, ou *campo de existência,* e chamamos B de *contradomínio* da f. O conjunto dos valores em B que recebem os elementos de A, mediante a transformação f, é chamado de *imagem* da f.

Notações:
$\mathrm{D}(f) = A$: Domínio da f;
$\mathrm{CD}(f)=B$: contradomínio da f;
$\mathrm{Im}(f)=f(A)$: imagem da f.

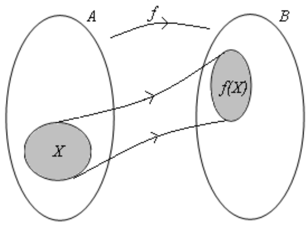
Chamamos os elementos do domínio da f de *variáveis independentes* e os elementos da imagem da f de *variáveis dependentes.* Isto porque cada imagem *depende* de um domínio, i.e., $y = f(x)$, ou seja, a variável y da imagem é função de um elemento x do domínio.

Obs.: Chamamos a atenção para não confundir os símbolos "f" e "$f(x)$": o primeiro denota a função f e o segundo denota a imagem do elemento x do domínio mediante f.

Definição 1.26 Sejam A e B dois conjuntos não vazios, $X \subset A$ e $f : A \to B$ uma função. Definimos a *imagem direta* de X por f, e denotamos por $f(X)$, o conjunto de todos $y \in B$, tais que $y = f(x)$, com $x \in X$.
Mais precisamente,

$$f(X) = \{f(x)\ :\ x \in X\}.$$

Abaixo, temos uma representação em diagramas para ilustrar geometricamente a definição de imagem direta.



Na proposição a seguir, encerramos as principais propriedades da imagem direta de um conjunto por uma função.

Proposição 1.27 *Sejam $f : A \to B$ uma função, $X, Y \subset A$. Valem as propriedades:*

(a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

(b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

(c) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$.

(d) $f(\emptyset) = \emptyset$.

Antes de provar a proposição acima, observe que a propriedade (b) não é uma igualdade, mas apenas uma contenção. Mostraremos através de um exemplo que a contenção contrária pode ser falsa, não valendo, portanto, uma igualdade como em (a). Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e sejam os subconjuntos X e Y do domínio dados por: $X = (-\infty, 0]$ e $Y = [0, +\infty)$. Como $f(x) = x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue que

$$f(X) = [0, +\infty) = f(Y).$$

Assim, temos $f(X) \cap f(Y) = [0, +\infty)$, mas sendo $X \cap Y = \{0\}$, obtemos $f(X \cap Y) = \{0\}$, ou seja,

$$f(X) \cap f(Y) \not\subset f(X \cap Y),$$

portanto, não vale, em geral, a contenção contrária.

Demonstração. Faremos apenas as provas de (a) e (d), e deixaremos as demais para o leitor.
(a) Para provar (a), precisamos mostrar duas contenções:
$f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$ e $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$.
Af 01. $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$:
De fato, dado $y \in f(X \cup Y)$, segue da definição de imagem direta que $\exists\, x \in X \cup Y$ tal que $y = f(x)$. Então, $x \in X$ ou $x \in Y$.
Se $x \in X$, temos $f(x) \in f(X) \subset f(X) \cup f(Y)$.
Por outro lado, se $x \in Y$, temos $f(x) \in f(Y) \subset f(X) \cup f(Y)$.
Em qualquer dos casos, concluímos que $y = f(x) \in f(X) \cup f(Y)$, o que prova a afirmação 01.
Af 02. $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$:
De fato, dado $y \in f(X) \cup f(Y)$, segue que $y \in f(X)$ ou $y \in f(Y)$.
Se $y \in f(X)$, segue que $\exists\, x \in X \subset X \cup Y$, tal que $f(x) = y$. Assim,

$$x \in X \subset X \cup Y \Rightarrow y = f(x) \in f(X \cup Y).$$

Analogamente, por outro lado, se $y \in f(Y)$, segue que $\exists\, z \in Y \subset X \cup Y$, tal que $f(z) = y$. Assim,

$$z \in X \subset X \cup Y \Rightarrow y = f(z) \in f(X \cup Y).$$

Em qualquer dos casos, concluímos a afirmação 02.
Por estas duas afirmações, provamos (a).

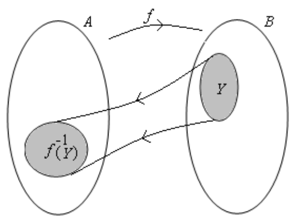
(d) Para mostrar a iguadade requerida, iremos provar as afirmações:
Af 01. $\emptyset \subset f(\emptyset)$:
Imediato por propriedade, pois lembremos que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
Af 02. $f(\emptyset) \subset \emptyset$:
Por absurdo, se $f(\emptyset) \not\subset \emptyset$, então, $\exists y_0 \in f(\emptyset)$, tal que $y_0 \notin \emptyset$. Como $y_0 \in f(\emptyset)$, segue que $\exists x_0 \in \emptyset$, tal que $f(x_0) = y_0$. Mas $x_0 \in \emptyset$ é um absurdo, pois viola a definição de conjunto vazio. Portanto, vale a afirmação 02.
Pelas afirmações 01 e 02, fica provado que $f(\emptyset) = \emptyset$.

□

Definição 1.28 Sejam $f : A \to B$ uma função e $Y \subset B$. Definimos a *imagem inversa* do conjunto Y pela f ou *pré-imagem* de Y por f como o conjunto de todos os domínios de Y pela f. Em símbolos,

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \,:\, f(x) \in Y\}.$$

O esquema a seguir serve para ilustrar a definição dada.



Observe, porém, que pode ocorrer que o conjunto das imagens inversas seja vazio, mesmo que $Y \subset B$ não seja. Temos a proposição seguinte que nos prova esta afirmação.

Proposição 1.29 *Sejam* $f : A \to B$ *e* $Y \subset B$*. Temos que* $f^{-1}(Y) = \emptyset$ *se, e somente se,* $f(A) \cap Y = \emptyset$*.*

Demonstração. Suponhamos que $f(A) \cap Y = \emptyset$. Mostraremos que $f^{-1}(y) = \emptyset$. Por absurdo, se $f^{-1}(Y) \neq \emptyset$, então, $\exists\, x_0 \in A$ tal que $f(x_0) \in Y$. Mas $f(x_0) \in f(A)\,(= \mathrm{Im}(f))$. Logo, concluímos que $f(A) \cap Y \neq \emptyset$, o que contradiz a hipótese. Absurdo. Logo, concluímos que $f^{-1}(Y) = \emptyset$.
Reciprocamente, suponhamos que $f^{-1}(Y) = \emptyset$. Mostraremos que $f(A) \cap Y = \emptyset$. Por absurdo, suponhamos que $f(A) \cap Y \neq \emptyset$. Assim, temos que $\exists\, y_0 \in B$, tal que $y_0 \in f(A)$ e $y_0 \in Y$. Mas $y_0 \in Y$ implica que $f^{-1}(y_0) \in f^{-1}(Y)$ e, portanto, $f^{-1}(Y) \neq \emptyset$, mas isto contradiz a hipótese. Absurdo. Logo, vale a recíproca e, com isto, concluímos a prova da proposição.

□

Observe no exemplo a seguir uma aplicação da proposição acima.

Exemplo. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Notamos que a imagem $f(A) = f((0, +\infty))$ é dada por $f(A) = (0, +\infty)$. Portanto, para ter $f(A) \cap Y = \emptyset$ basta tomar $Y \in B = \mathbb{R}$ tal que $f(A) \cap Y = \emptyset$, como, por exemplo, $Y = (-\infty, 0)$. Teremos $f^{-1}(Y) = \emptyset$.

A proposição abaixo encerra as principais propriedades da imagem inversa.

Proposição 1.30 *Sejam $f : A \to B$ uma função e $Y, Z \subset B$. Valem as propriedades:*

(a) $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$;

(b) $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$;

(c) $f^{-1}(Y^{\complement}) = \left(f^{-1}(Y)\right)^{\complement}$;

(d) $Y \subset Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$.

Demonstração. Faremos apenas as demonstrações de (a) e (d). As demais ficam como exercício.
(a) Podemos provar as duas contenções simultaneamente:

$$x \in f^{-1}(Y \cup Z) \Leftrightarrow f(x) \in Y \cup Z \Leftrightarrow f(x) \in Y \text{ e } f(x) \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \text{ e } x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z).$$

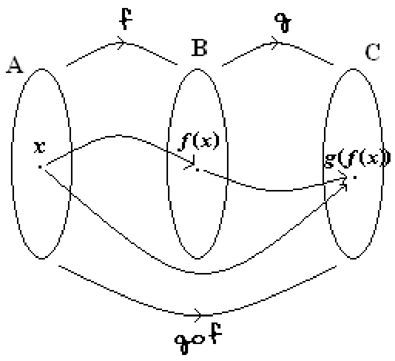
(d) Suponhamos que $Y \subset Z$. Mostraremos que $f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$. Por absurdo, se $f^{-1}(Y) \not\subset f^{-1}(Z)$, então $\exists\, x_0 \in f^{-1}(Y)$ tal que $x_0 \notin f^{-1}(Z)$.
Mas, então, $x_0 \in f^{-1}(Y) \Rightarrow f(x_0) \in Y \subset Z$, i.e., $f(x_0) \in Z$, ou seja, $x_0 \in f^{-1}(Z)$. Mas, temos $x_0 \notin f^{-1}(Z)$. Absurdo! Logo, concluímos que $f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$, ou seja, vale (d).

$\square$

Definição 1.31 Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções, onde o domínio da g é igual ao contradomínio da f. Definimos a *função composta* $g \circ f : A \to C$ por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Abaixo, temos um esquema em diagramas ilustrando a definição acima.



Note que a composição $g \circ f$ toma os valores de A e leva diretamente para o conjunto C. A *grosso modo*, poderíamos dizer que a composição de funções é um "atalho".

No esquema acima, temos

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$

$$x \in A \Longrightarrow y = f(x) \in B \Longrightarrow g(y) = g(f(x)) \in C,$$

e, portanto,

$$x \in A \Longrightarrow (g \circ f)(x) \in C$$

Proposição 1.32 *A composição de funções é associativa.*

Demonstração. Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ funções. Mostraremos que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

De fato, $\forall x \in A$, temos

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

$\square$

1.5 Funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva

Nesta seção, apresentaremos as noções de injetividade, sobrejetividade e bijetividade de funções. Estes conceitos serão amplamente usados quando estudarmos a cardinalidade de conjuntos no capítulo seguinte.

Definição 1.33 Dizemos que uma função $f : A \to B$ é *injetiva* se

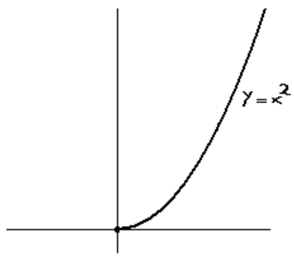
$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in A.$$

Uma forma equivalente de definir injetividade é

$$\forall x, y \in A\, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Em outras palavras, dizemos que uma função $f : A \to B$ é injetiva se domínios diferentes assumirem imagens também diferentes.

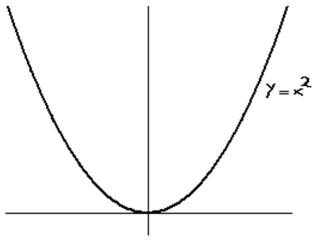
Exemplo 01. A função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é injetiva, pois dados $x, y \in [0, +\infty)$, digamos, $0 \leq x < y$, teremos $f(x) = x^2 < y^2 = f(y)$, ou seja, $f(x) \neq f(y)$. Abaixo, temos um esboço gráfico dessa função, justificando que f é injetiva.



Exemplo 02. A função $id : A \to A$ dada por $id(x) = x$ é injetiva. De fato, $\forall x, y \in A$, se $id(x) = id(y)$, implica diretamente que $x = y$.

Essa função será de extrema importância para nós e chama-se *função identidade*. Note que a função identidade deixa o x “invariante”, ou seja, $id(x) = x$.

Exemplo 03. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ **não é** injetiva. Para verificar isto, basta tomar domínios simétricos. Assim, $x \neq -x$, mas $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Logo, há domínios diferentes que possuem a mesma imagem. Logo, f não é injetiva. Abaixo, temos um esboço gráfico dessa função.



Definição 1.34 Dizemos que uma função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* se $\forall z \in B$, $\exists x \in A$, tal que $f(x) = z$.

Outra maneira de dizer que f é sobrejetiva é dizer que $\mathrm{Im}(f) = f(A) = B$. Sobrejetividade, como o nome indica, significa que todo o conjunto B é imagem do conjunto A mediante a função $f : A \to B$.

Exemplo 01. A função identidade $id : A \to A$, $id(x) = x$ é sobrejetiva, pois $\forall z \in B$, $\exists x \in B = A$, tal que $id(z) = x$. Basta tomar como x o próprio z dado.

Exemplo 02. A função $f : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ dada por $f(x) = x^2 + 1$ é sobrejetiva, pois $\forall z \in [1, +\infty)$, $\exists x \in [0, +\infty)$, tal que $f(x) = z$. Basta tomar $x = \sqrt{z-1}$, que tem sentido real, pois $z \geq 1$:

$$f(x) = f(\sqrt{z-1}) = (\sqrt{z-1})^2 + 1 = (z-1) + 1 = z.$$

Outra maneira de verificar a sobrejetividade neste exemplo é observar que, $\forall x \in [0, +\infty)$, temos

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 1,$$

ou seja, $\mathrm{Im}(f) = [1, +\infty)$.

Exemplo 03. A função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ **não é** sobrejetiva, pois $\forall x \in [0, +\infty)$, temos que $f(x) = x^2 \geq 1$. Portanto,

$$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty) \neq \mathbb{R}.$$

Definição 1.35 Dizemos que uma função $f : A \to B$ é *bijetiva* se for injetiva e sobrejetiva. Mais precisamente, $f : A \to B$ é bijetiva se $\forall z \in B$, $\exists!\, x \in A$, tal que $f(x) = z$.

Exemplo. Já vimos que a função identidade $id : A \to A$, $id(x) = x$ é injetiva e sobrejetiva e, portanto, bijetiva.

Proposição 1.36 *A composição de funções injetivas é também injetiva.*

Demonstração. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções injetivas. Precisamos mostrar que a composta $g \circ f : A \to C$ também é injetiva.
Dados $x, y \in A$, segue que

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Longrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \underbrace{\Longrightarrow}_{g\ \text{é inj.}} f(x) = f(y) \underbrace{\Longrightarrow}_{f\ \text{é inj.}} x = y.$$

Portanto, segue que $g \circ f$ também é injetiva.

$\square$

Proposição 1.37 *A composição de funções sobrejetivas também é sobrejetiva.*

Demonstração. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções sobrejetivas. Precisamos mostrar que a composta $g \circ f : A \to C$ também é sobrejetiva.
Dado $z \in C$, como g é sobrejetiva, segue que $\exists\, y \in B$, tal que $g(y) = z$.
Da mesma forma, como f é também sobrejetiva, segue que $\exists\, x \in A$, tal que $f(x) = y$.

Assim, temos que $\forall z \in C$, obtemos $x \in A$, tal que

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x),$$

ou seja, a composta $g \circ f$ é sobrejetiva. Isto prova a proposição.

$\square$

Corolário 1.38 *A composição de funções bijetivas também é bijetiva.*

Demonstração. Imediato da definição de função bijetiva e das duas proposições anteriores.

$\square$

Proposição 1.39 *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Se $W \subset C$, então,*

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$$

Demonstração. Podemos provar as duas contenções simultaneamente. Assim, $\forall x \in A$, temos

$$x \in f^{-1}(g^{-1}(W)) \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(W) \Leftrightarrow g(f(x)) \in W \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in W \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (g \circ f)^{-1}(W).$$

$\square$

1.6 Restrição de uma função

Definição 1.40 Sejam $f : A \to B$ uma função e $X \subset A$. Definimos a *restrição* de f em X por

$$f_{|X} : X \to B.$$

Ou seja, a restrição de uma função $f : A \to B$ em um subconjunto X do domínio A é uma nova função $f_{|X}$ em X com valores em B cuja regra que a define é a mesma que define f, porém, *restrita* ao conjunto X.

Por exemplo, dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, uma restrição de f , por exemplo, é $f_{|[0,+\infty)} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_{|[0,+\infty)}(x) = x^2$.

Observe neste caso que f não é injetiva, mas a f restrita em $[0, +\infty)$, ou seja, $f_{|[0,+\infty)}$, é injetiva.

1.7 Inversa de uma função

1.7.1 Inversas à esquerda e à direita

Recorde do estudo de matrizes que uma matriz quadrada M possui uma matriz *inversa* B se B satisfizer

$$M \cdot B = B \cdot M = I_n,$$

onde I_n é a matriz *identidade* de ordem n.
De fato, o que se definiu acima é bem mais amplo do que parece: para dizer que B é a matriz inversa de M, precisamos mostar que B é matriz *inversa à esquerda* para M, i.e., $B \cdot M = I_n$ e, também, precisamos mostrar que B é matriz *inversa à direita* para M, i.e., $M \cdot B = I_n$.

Por exemplo, a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ não é inversível, pois não é quadrada, embora possua inversa à esquerda $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$B \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

esta inversa à esquerda não é inversa à direita, pois

$$M \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \neq I_2.$$

Analogamente, teremos estes conceitos para funções, onde matrizes serão substituídas por funções e o produto de matrizes será substituído por composição de funções.

Queremos, nesta seção, responder a seguinte questão: Dada $f : A \to B$, $x \mapsto f(x) = y$, quando é possível encontar uma transformação $g : B \to A$, tal que $g(y) = x$? Ou seja, dada a aplicação f de A em B, quando é possível obter uma aplicação g que leva "de volta" os valores de B em A? Se existir tal função g, ela será chamada de *função inversa da* f.

pelo exemplo matricial dado acima e os demais comentários feitos, apresentamos as definições e resultados que seguem.

Definição 1.41 Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ funções. Dizemos que g é uma *inversa à esquerda* para f se

$$g \circ f = id_A : A \to A, \text{ i.e.,}$$

$$g(f(x)) = x\,,\ \forall x \in A.$$

Exemplo. Seja $A = [0, +\infty)$ e defina as funções $f : A \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R} \to A$ por $g(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{se } \ y \geq 0 \\ 0, & \text{se } \ y < 0 \end{cases}$

De fato, g é uma inversa à esquerda para f pois, $\forall x \in A$, temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} \sqrt{x^2} = |x| = x, & \text{se } \ x \geq 0 \\ 0, & \text{se } \ x < 0 \end{cases} = id_A(x),$$

portanto,

$$g \circ f = id_A.$$

Observe que a inversa à esquerda **não é única**. De fato, note que, $\forall \tilde{g} : \mathbb{R} \to A$ tal que $\tilde{g}(y) = \sqrt{y}$ para $y \geq 0$ é uma inversa à esquerda para f. Por exemplo, a função $\tilde{g} : \mathbb{R} \to A$ dada por

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{se } \ y \geq 0 \\ 1, & \text{se } \ y < 0 \end{cases}$$

também é inversa à esquerda para f.(verifique!)

Definição 1.42 Dizemos que $g : B \to A$ é uma *inversa à direita* para $f : A \to B$ se

$$f \circ g = id_B : B \to B, \ \text{ i.e.,}$$

$$f(g(y)) = y,\ \forall y \in B.$$

A seguir, apresentamos dois teoremas importantes.

Teorema 1.43 *Uma função $f : A \to B$ possui inversa à esquerda se, e somente se, f for injetiva.*

Demonstração. Suponhamos que f seja injetiva. Vamos mostrar que f possui uma inversa à esquerda.

Como, por hipótese, f é injetiva, segue que $\forall y \in f(A)$, $\exists!\, x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Escreva $x = \tilde{g}(y)$.

Isto define a função $\tilde{g} : f(A) \to A$ tal que $\tilde{g}(f(x)) = x$, $\forall x \in A$.

Finalmente, definimos $g : B \to A$ por

$$g(y) = \begin{cases} x = \tilde{g}(y); \forall y \in f(A) \\ 0; \forall y \in B - f(A) \end{cases}$$

Então,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x, \ \forall x \in A,$$

logo, g é inversa à esquerda para f, o que queríamos mostrar.

Reciprocamente, suponhamos que f possua uma inversa à esquerda $g : B \to A$. Vamos mostrar que f é injetiva.
Como por hipótese $\exists\, g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A : A \to A$, então, dados $x_1, x_2 \in A$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

e portanto, f é injetiva. Isto conclui a prova do teorema.

□

Teorema 1.44 *Uma função $f : A \to B$ possui inversa à direita se, e somente se, f for sobrejetiva.*

Demonstração. Suponhamos que f seja sobrejetiva. Vamos mostrar que f possui uma inversa à direita.

Se f é sobrejetiva, então $\forall y \in B$, o conjunto $\{f^{-1}(y)\}$(o conjunto das imagens inversas de y mediante f) é não vazio.

Escolha, $\forall y$, um $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e ponha $g(y) = x$.

Isto define a função $g : B \to A$ tal que

$$f(g(y)) = f(x) = y.$$

Então, g é inversa à direita de f, o que prova a primeira parte.

Reciprocamente, suponhamos que f possua uma inversa à direita $g : B \to A$. Vamos mostrar que f é sobrejetiva.
Se $\exists\, g : B \to A$ com $f \circ g = id_B : B \to B$, então, $\forall y \in B$, pondo $x = g(y)$, temos

$$f(x) = f(g(y)) = y,$$

ou seja, f é sobrejetiva.
Isto conclui a prova do teorema.

□

1.7.2 Função inversa

Nesta seção vamos apresentar o importante conceito de função inversa, bem como algumas propriedades.

Definição 1.45 Uma função $g : B \to A$ é *inversa* de $f : A \to B$ quando $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$, i.e., quando g é inversa à esquerda e à direita para f.

Obs.: Confronte esta definição com o conceito de matriz inversa dado no início desta seção.

Notação: a inversa de $f : A \to B$ costuma ser notada por $f^{-1} : B \to A$; $x = f^{-1}(y)$.

O teorema que enunciaremos a seguir nos dá condições necessárias e suficientes para decidir se uma função admite inversa.

Teorema 1.46 *A função $f : A \to B$ possui inversa se, e somente se, f for bijetiva.*

Obs.: Quando uma função f possui inversa f^{-1}, dizemos que f é *inversível*.

Demonstração. Imediato pelos teoremas e definições anteriores.

□

Recorde que inversas à direita e à esquerda não são únicas. Porém, felizmente, o teorema a seguir garante unicidade da inversa:

Teorema 1.47 *A inversa de $f : A \to B$, se existir, é única.*

Demonstração. Sejam $g : B \to A$ e $h : B \to A$ inversas de $f : A \to B$. Vamos mostrar que $g = h$. Note que, usando a associatividade da composição, podemos escrever

$$h = h \circ id_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = id_A \circ g = g,$$

o que conclui a prova do teorema.

□

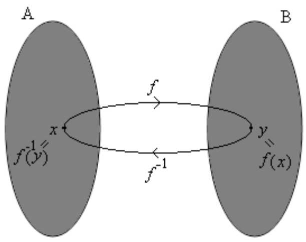
Por fim, resumindo, temos o seguinte resultado principal: Seja $f : A \to B$ bijetiva. Assim, por teorema $\exists f^{-1} : B \to A$ inversa de f, que é única, tal que

$$f \circ f^{-1} = id_B : B \to B \quad \text{e} \quad f^{-1} \circ f = id_A : A \to A$$

onde

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = id_B(y) \quad \text{e}$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = id_A(x).$$

Vejamos alguns exemplos de obtenção de inversas.



Exemplo 1. Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - 3x$ é inversível e obtenha a inversa f^{-1}.

Solução. De acordo com o teorema (1.46), f admite inversa se, e só se, for bijetiva. Assim, precisamos mostrar que f é injetiva e sobrejetiva.

Afirmação 01. f é injetiva:
De fato, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 1 - 3x = 1 - 3y \Rightarrow -3x = -3y \Rightarrow x = y.$$

Afirmação 02. f é sobrejetiva:
De fato, $\forall z \in \mathbb{R}$, $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = z$. Basta tomar $x = \dfrac{1-z}{3}$:

$$f(x) = 1 - 3\left(\frac{1-z}{3}\right) = 1 - 1 + z = z.$$

Logo, f é bijetiva e pelo Teorema (1.46), $\exists\, f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Obtenção de f^{-1}:
De $y = 1 - 3x$, como $x = f^{-1}(y)$ (pois $\exists\, f^{-1}$), tiramos

$$y = 1 - 3f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1-y}{3}.$$

Portanto, a inversa f^{-1} é dada por

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$f^{-1}(y) = \frac{1-y}{3}.$$

Exemplo 2. Encontre o conjunto B para que $f : (-\infty, 1] \to B$ dada por $f(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ seja inversível. Em seguida, obtenha a inversa f^{-1}.

Solução. Note que o domínio máximo da f é exatamente $(-\infty, 1]$.
Vamos obter a imagem da f. Note que

$$\forall x \leq 1 \Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow 1 - x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{1-x} \leq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - \sqrt{1-x} \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1.$$

Logo, $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1]$.

Como para existir a inversa f^{-1}, f deve ser sobrejetiva e injetiva; para ser sobrejetiva temos que admitir

$$B = \mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1].$$

Assim, temos que $f : (-\infty, 1] \to (-\infty, 1]$, $f(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ é sobrejetiva. Resta verificar se f é injetiva.

Note que $\forall x, y \in (-\infty, 1]$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 1 - \sqrt{1-x} = 1 - \sqrt{1-y} \Rightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{1-y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - x = 1 - y \Rightarrow x = y.$$

Portanto, f também é injetiva.
Logo, $\exists\, f^{-1} : (-\infty, 1] \Rightarrow (-\infty, 1]$, $x = f^{-1}(y)$.

Obtenção de f^{-1}: Dado $y = 1 - \sqrt{1-x}$, como precisamos obter $x = f^{-1}(y)$, precisamos isolar a variável x da expressão. Assim,

$$y = 1 - \sqrt{1-x} \Rightarrow y - 1 = -\sqrt{1-x} \Rightarrow 1 - y = \sqrt{1-x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1-y)^2 = 1 - x \Rightarrow (1-y)^2 - 1 = -x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 1 - (1-y)^2 = f^{-1}(y).$$

Finalmente, obtemos a inversa de f:

$$f^{-1} : (-\infty, 1] \to (-\infty, 1]$$
$$f^{-1}(y) = 1 - (1-y)^2.$$

Capítulo 2

Números reais

Nosso objetivo neste capítulo é estudar o *corpo dos números reais* e suas propiedades. Primeiramente, apresentaremos uma definição geral sobre corpo, em seguida o corpo dos números racionais e, finalmente, o corpo dos números reais.

2.1 Definição e propriedades

Definição 2.1 Um *corpo* é um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações binárias, chamadas *adição* $+ : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(a, b) \mapsto a+b \in \mathbb{K}$ e *multiplicação* $\cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b \in \mathbb{K}$, que satisfazem os dez axiomas a seguir:

Associatividade: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$,

$$\text{A1:} \quad (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$\text{M1:} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Comutatividade: $\forall x, y \in \mathbb{K}$,

$$\text{A2:} \quad x + y = y + x,$$

$$\text{M2:} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Elemento Neutro:

A3: $\exists\, 0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{K}$. O elemento 0 chama-se *zero*.

M3: $\exists\, 1 \in \mathbb{K}$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{K}$.

O elemento 1 chama-se *um*.

Simétrico:

A4: $\forall x \in \mathbb{K}, \exists -x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = 0$.

Inverso Multiplicativo:

M4: $\forall x \neq 0$, $x \in \mathbb{K}$, $\exists x^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Distributividade: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ tem-se

D1: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

D2: $(y + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Observações.

- Um corpo $\mathbb{K}$, munido com as operações $+$ e $\cdot$, geralmente é representado por $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, mas sempre que não houver confusão, vamos simplesmente escrever $\mathbb{K}$ e as operações ficam subentendidas.

- Note que das comutatividades seguem: $0 + x = x$, $-x + x = 0$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ $\forall x \in \mathbb{K}$ e que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$, $\forall x \neq 0, x \in \mathbb{K}$.

Proposição 2.2 *Os neutros aditvo e multiplicativo de um corpo são únicos.*

Demonstração. De fato, mostremos que o neutro aditivo é único: Sejam 0 e θ neutros aditivos num corpo $\mathbb{K}$. Assim,

$$0 = 0 + \theta = \theta,$$

onde a primeira igualdade acima decorre do fato de θ ser o neutro aditivo e a segunda decorre do fato de que 0 é neutro aditivo. Ou seja, mostramos a unicidade, i.e., $0 = \theta$.

Analogamente se mostra que o neutro multiplicativo 1 é único.

$\square$

Definição 2.3 Vamos indicar a soma $x + (-y)$ pela notação $x - y$ e a esta notação dá-se o nome de *diferença* entre x e y. A operação $- : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto x - y$ chama-se *subtração.*

Somando-se y a ambos os lados de uma igualdade do tipo $x - y = z$, obtém-se $x = y + z$. *Simili modo*, se $x = y + z$ então, somando-se $-y$ a ambos os lados obtém-se $x - y = z$. Disso segue que $x - y = z \Leftrightarrow x = y + z$.

O simétrico é único: se $x + y = 0$, então, $y = 0 - x$, ou seja, $y = -x$. Também temos $-(-x) = x$. De fato, como $(-x) + x = 0$, somando-se $-(-x)$ em ambos os membros da igualdade vem $-(-x) + (-x) + x = -(-x) + 0 = -(-x)$. Pela associatividade podemos escrever

$$[-(-x) + (-x)] + x = -(-x) \Rightarrow 0 + x = -(-x) \Rightarrow -(-x) = x.$$

Temos também que vale a *lei do corte*: $x + z = y + z \Rightarrow x = y$.

Dados $x, y \in \mathbb{K}$, com $y \neq 0$, escrevemos, também, $\dfrac{x}{y}$, ao invés de $x \cdot y^{-1}$. A operação $(x, y) \mapsto \dfrac{x}{y}$, com $y \neq 0$ chama-se *divisão* e o resultado chama-se *quociente*. Note que não se divide por zero[1].
Se $y \neq 0$, temos $\dfrac{x}{y} = z \Leftrightarrow x = y \cdot z$. Disso se deduz a lei do corte para a multiplicação.

Dos axiomas da distributividade segue que $x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{K}$. De fato, basta observar que $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$.

[1] Na "tentativa" de se dividir por zero, geramos vários absurdos, como por exemplo: se $A = B$, então

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = A^2 - 2B^2 + B^2 = A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A - B)^2 = (A - B)(A + B) \underbrace{\Longrightarrow}_{\star} A - B = A + B \Rightarrow -B = B \Rightarrow -1 = 1.$$

O absurdo surgiu porque em $\star$, ao simplificar toda a igualdade por $A - B$, fizemos uma divisão por zero, já que $A = B$ e então $A - B = 0$.

Por outro lado, se $x \cdot y = 0$, segue que ou $x = 0$ ou $y = 0$. Mostremos este fato: suponhamos que $x \cdot y = 0$. Se $y \neq 0$, segue que $\exists \dfrac{1}{y} \neq 0$. Disso, multiplicando a igualdade $x \cdot y = 0$ por $\dfrac{1}{y}$ temos

$$x \cdot y \cdot \frac{1}{y} = 0 \cdot \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow x\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow x \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Analogamente, se $x \neq 0$, mostra-se que $y = 0$.

Vemos disso que em um corpo $\mathbb{K}$, temos que $x \cdot y \neq 0$ se, e somente se, $x, y \neq 0$.

Note que se $\mathbb{K}$ não for um corpo esta última propriedade não vale. Por exemplo, seja $\mathbb{K} = M_{2,2}(\mathbb{Q})$ o conjunto das matrizes 2×2 com entradas racionais e com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matrizes. Note que o elemento neutro para a adição é a matriz nula $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e o neutro para a multiplicação é a matriz identidade $1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Note também que, em geral $A \cdot B \neq B \cdot A$, i.e., o produto de matrizes não comuta. Além disso, sabe-se também que nem toda matriz A possui uma inversa A^{-1}. Logo, o conjunto $\mathbb{K} = M_{2,2}(\mathbb{Q})$ não é um corpo e, portanto, podem existir (e de fato existem) elementos $A, B \neq 0$ tais que $A \cdot B = 0$. Por exemplo, para A e B dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

temos que $A \cdot B = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$(verifique!).

Isto ocorre pois c.f. observado acima, vimos que $\mathbb{K} = M_{\mathbb{Q}}(2,2)$ não é um corpo.

Mais propriedades sobre corpos estão contemplados na lista de exercícios ao final deste capítulo.

2.2 Exemplos e contra-exemplos de corpos

Vejamos nesta seção alguns exemplos e contra-exemplos de corpos.
Exemplo 01. Observamos nos comentários anteriores que $(M_{2,2}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ não é corpo, onde $+$ é a adição usual de matrizes e $\cdot$ é o produto usual de matrizes.

Exemplo 02. Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, com as operações usuais de adição e multiplicação não formam corpos.

No caso dos naturais $\mathbb{N}$, por exemplo, dado $n \in \mathbb{N}$, segue que, exceto[2] 1, nenhum outro elemento de $\mathbb{N}$ possui inverso multiplicativo, i.e., dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\nexists n^{-1}$ tal que $n \cdot n^{-1} = 1$.

Verifique o que falha no caso dos inteiros $\mathbb{Z}$.

Exemplo 03. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, com as operações dadas por

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},$$
$$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an + bm}{bn},$$

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn},$$

Fica como exercício mostrar que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo.

No caso do corpo dos números racionais, observamos que todo número racional pode ser representado por uma fração decimal finita ou infinita periódica. Note que uma fração finita pode ser representada como uma fração infinita com *período* 0 ou 9. Por exemplo:

$$2,73 = 2,7300000000000... = 2,729999999999999...$$

[2]Excluímos $1 \in \mathbb{N}$ pois este possui inverso em $\mathbb{N}$, que é ele próprio: $1 \cdot 1 = 1$.

Para entender a última igualdade acima, basta expandir o número como potências de base dez, considerando a soma de uma progressão geométrica.

Sejamos mais precisos: considere número

$$a = a_0, a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_\ell b_1 b_2 ... b_\ell b_1 b_2 ... b_\ell ...,$$

que costuma ser representado por

$$a = a_0, a_1 a_2 ... a_n \overline{b_1 b_2 ... b_\ell},$$

onde $a, a_0, ..., a_n, b_1, ...b_\ell \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ são chamados de dígitos.

Mostraremos que este número é racional. De fato, podemos expandí-lo da seguinte forma:

$$a = a_0 + \frac{a_1 ... a_n}{10^n} + \frac{b_1 ... b_\ell}{10^{n+\ell}} + \frac{b_1 ... b_\ell}{10^{n+2\ell}} + \frac{b_1 ... b_\ell}{10^{n+3\ell}} + ... =$$

$$= a_0 + \frac{a_1 ... a_n}{10^n} + \frac{b_1 ... b_\ell}{10^{n+\ell}} \left(\underbrace{1 + \frac{1}{10^\ell} + \frac{1}{10^{2\ell}} + \frac{1}{10^{3\ell}} + ...}_{\text{soma de uma P.G. infinita}} \right) =$$

$$= a_0 + \frac{a_1 ... a_n}{10^n} + \frac{b_1 ... b_\ell}{10^{n+\ell}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^\ell}} =$$

$$= a_0 + \frac{a_1 ... a_n}{10^n} + \frac{b_1 ... b_\ell}{10^\ell (10^n - 1)} \in \mathbb{Q},$$

pois é uma soma de números racionais.

Já o número

$$b = 0, 1010010001000010000010000001...$$

não é racional, pois repare que entre dois dígitos não nulos há uma quantidade de zeros que vai aumentando, não sendo possível, então, representá-lo sob a forma de uma fração, pois tal representação decimal não é periódica. Outros exemplos mais interessantes de números que são irracionais são as constantes matemáticas $\pi = 3,1415926535...$ e o número de Euler $e = 2,7182818284590...$. Tais númeors não racionais são denominados de *irracionais*.

Exemplo 04. O conjunto $\mathbb{Q}(i) = \{(a,b); a,b \in \mathbb{Q}\}$ com as operações de adição e multiplicação dadas respectivamente por:

$$+ : \mathbb{Q}(i) \times \mathbb{Q}(i) \to \mathbb{Q}(i),$$

$$(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v),$$

$$\cdot : \mathbb{Q}(i) \times \mathbb{Q}(i) \to \mathbb{Q}(i),$$

$$(x,y) \cdot (u,v) = (xu - yv, xv + yu)$$

Afirmamos que $\mathbb{Q}(i)$ é um corpo. Note que o elemento neutro para a adição é $(0,0)$ pois sendo (a,b) o neutro aditivo, temos $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}(i)$:

$$(x,y) + (a,b) = (x,y) \Leftrightarrow (x+a, y+b) = (x,y) \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow (a,b) = (0,0).$$

Note também que o neutro multiplicativo é $(1,0)$, o simétrico de (x,y) é $(-x,-y)$ e o inverso de $(x,y) \neq (0,0)$ é $(x,y)^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, -\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ (exercício).

Escrevendo $1 = (1,0)$ e $i = (0,1)$, notamos que $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}(i)$, $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + yi$, e disso identificamos a notação (x,y) com a notação $x + iy$.

Notamos ainda que, c.f. as definições dadas,

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -(1,0) = -1,$$

ou seja,

$$i^2 = -1$$

Concluímos que o corpo $(\mathbb{Q}(i), +, \cdot)$ é o *corpo dos números complexos com componentes racionais.*

2.3 Potência

Definição 2.4 Se $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e n é natural, definimos a *potência* x^n por

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ fatores}};$$

$$x^0 = 1;$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Desta definição segue a seguinte proposição.

Proposição 2.5 Para quaisquer $x, y \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo, e para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, valem as igualdades:

(a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$;

(b) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$;

(c) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.

Demonstração. Todas estas igualdades são provadas usando o princípio da indução matemática. Faremos apenas a demonstração de (a) e as demais ficam como exercício. Fixemos $m \in \mathbb{N}$ e vamos trabalhar com $n \in \mathbb{N}$. Note que
(i) para $n = 1$ temos $x^m \cdot x^1 = x^m \cdot x = x^{m+1}$. Logo, vale (i).
(ii) Suponhamos que a igualdade valha para $n = k$, i.e., que $x^m \cdot x^k = x^{m+k}$. Precisamos mostrar que $x^m \cdot x^{k+1} = x^{m+(k+1)}$. Note que

$$x^m \cdot x^{k+1} = x^m \cdot x^k \cdot x = x^{m+k} \cdot x = x^{(m+k)+1} = x^{m+(k+1)},$$

portanto, vale (ii).

Disso, segue que vale (a), $\forall n \in \mathbb{N}$ e para $m \in \mathbb{N}$ fixado.

Analogamente se mostra quando fixarmos n e variarmos m.

$\square$

2.4 Corpos ordenados

Definição 2.6 Dizemos que um corpo $\mathbb{K}$ é *ordenado* quando é possível destacar um subconjunto $P \subset \mathbb{K}$, chamado de o *conjunto dos positivos de* $\mathbb{K}$ tal que satisfaça as condições:

1. $\forall x, y \in P$, $x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$;
2. $\forall x \in \mathbb{K}$, $x \in P$ ou $-x \in P$ ou $x = 0$.

Indicando por $-P$ o conjunto dos elementos $-x$ tais que $x \in P$, temos que $\mathbb{K} = P \cup (-P) \cup \{0\}$, sendo estes três conjuntos que compõe $\mathbb{K}$ dois a dois disjuntos. Dizemos que $-P$ é o conjunto dos elementos *negativos* de $\mathbb{K}$.

Note que, em um corpo ordenado, se $\alpha \neq 0$, então $\alpha^2 \in P$. De fato, se $a \neq 0$, segue que $a \in P$ ou $-a \in P$. Se $a \in P$, então $a^2 = a \cdot a \in P$, e se $-a \in P$, temos que $P \ni (-a)(-a) = a \cdot a = a^2$.

Por exemplo, o corpo $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, no qual o conjunto P dos elementos positivos é formado pelos racionais $\dfrac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$.

2.5 Relação de ordem

Definição 2.7 Em um corpo ordenado $\mathbb{K}$, dizemos que x é *menor do que* y e escrevemos $x < y$, quando $y - x \in P$.

Em outras palavras, dizemos que $x < y$ se existir $b \in P$ tal que $x + b = y$.

Da mesma forma se define $x > y$.

Se $x > 0$ então $x = x - 0 \in P$, ou seja, x é positivo. Da mesma forma, se $x < 0$ temos que $-x > 0$, então $-x \in P$, i.e., x é negativo.

Proposição 2.8 *A relação de ordem $<$ goza das seguintes propriedades:*

O1: *Transitividade: se* $x < y$ *e* $y < z$ *então* $x < z$.

O2: *Tricotomia: dados* $x, y \in \mathbb{K}$, *exatamente uma das três afirmativas a seguir ocorre: ou* $x = y$, *ou* $x < y$ *ou* $x > y$.

O3: *Monotonicidade da adição: se* $x < y$ *então,* $\forall z \in \mathbb{K}$, $x + z < y + z$.

O4: *Monotonicidade da multiplicação: se* $x < y$ *então,* $\forall z > 0 \in \mathbb{K}$, $x \cdot z < y \cdot z$. *Se* $z < 0$ *então* $x \cdot z > y \cdot z$.

Demonstração. Faremos apenas O1 e O3. As demais ficam como exercício.

O1. Suponhamos que $x < y$ e $y < z$. Vamos mostrar que $x < z$. De $x < y$ segue que $y - x \in P$ e de $y < z$ segue que $z - y \in P$. Assim,

$$(z - y) + (y - x) \in P \Rightarrow z - x \in P \Rightarrow x < z,$$

ou seja, vale O1.

O3. Como $x < y$, por hipótese, então $y - x \in P$. Assim, $\forall z \in \mathbb{K}$,

$$P \ni y - x = y + z - z - x = (y + z) - (z + x),$$

ou seja,

$$(y + z) - (x + z) \in P \Rightarrow x + z < y + z, \ \forall z \in \mathbb{K}.$$

□

Corolário 2.9 Em um corpo ordenado $\mathbb{K}$, $x < y$ é equivalente a $-y < -x$.

Demonstração. Este fato é verificado facilmente a partir de O4, tomando $z = -1 < 0$.

□

Definição 2.10 Dados $x, y \in \mathbb{K}$. Dizemos que $x \leq y$ se $x < y$ ou $x = y$.

Um corpo ordenado pela relação $\leq$ é *parcialmente ordenado* pois valem as propriedades

(i) $x \leq x$, $\forall x \in \mathbb{K}$ (reflexividade);

(ii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in \mathbb{K}$ (anti-simetria);

(iii) $x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z \, \forall x, y, z \in \mathbb{K}$ (transitividade).

Estas propriedades são facilmente demonstradas e ficam como exercício.

Convém observar, também, que para provar que $x = y$ é preciso mostrar que $x \leq y$ e que $x \geq y$.

E, mais do que isso, como num corpo ordenado, dados quaisquer dois elementos x e y, vale que $x \leq y$ ou $y \leq x$ (devido à tricotomia de $<$ juntamente com a igualdade), ou seja, que dois elementos quaisquer x e y são sempre *comparáveis*, segue que um corpo ordenado é *totalmente ordenado*.

Definição 2.11 Dizemos que um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é *arquimediano* se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{K}$, $x > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n_0} < x$.

2.6 Intervalos

Em um corpo ordenado temos a importante noção de *intervalos*. A definição a seguir encerra os tipos de intervalos que podemos ter em um corpo ordenado $\mathbb{K}$.

Definição 2.12 *(Intervalos)* Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $a, b \in \mathbb{K}$ tais que $a < b$. Definimos os intervalos:

1. $[a, b] := \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\}$ (intervalo fechado).

   Tal intervalo representa o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{K}$ que estão entre a e b, **inclusive** os extremos a e b. Geometricamente, representamos o intervalo $[a, b]$ por
   Repare que os extremos a e b são representados por *bolas pintadas*. Esta simbologia serve para indicar que a e b também pertencem ao intervalo.

2. $(a, b) := \{x \in \mathbb{K} : a < x < b\}$ (intervalo aberto)

   Neste caso, tal intervalo representa o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{K}$ que estão entre a e b, **menos** os extremos a e b. Geometricamente, representamos o intervalo (a, b) por

   Repare que os extremos a e b são representados por *bolas "furadas"*. Esta simbologia serve para indicar que a e b não pertencem ao intervalo, são apenas limitantes do mesmo.

3. $[a, b) := \{x \in \mathbb{K} : a \leq x < b\}$ (intervalo misto)

4. $(a, b] := \{x \in \mathbb{K} : a < x \leq b\}$ (intervalo misto)

5. $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{K} : x \leq b\}$ (intervalo ilimitado à esquerda)

   Tal intervalo representa o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{K}$ que são menores ou iguais a b, cuja representação geométrica é dada por

   O símbolo $-\infty$, que se lê "menos infinito", não é um número. Representa apenas o significado: qualquer que seja $x \in \mathbb{K}$, existe $y \in \mathbb{K}$ que é menor que ele. O símbolo $+\infty$, que se lê "mais infinito", apresentado em seguida, tem o mesmo sentido que $-\infty$, porém, significando que: qualquer que seja $x \in \mathbb{K}$, existe $y \in \mathbb{K}$ que é maior que ele.

6. $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{K} : x < b\}$ (intervalo ilimitado à esquerda)

7. $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{K} : x \geq a\}$ (intervalo ilimitado à direita)

8. $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{K} : x > a\}$ (intervalo ilimitado à direita)

9. $(-\infty, +\infty) := \mathbb{K}$

Propositalmente não representamos geometricamente alguns intervalos definidos acima, pois são conhecidos do Cálculo. Deixamos como exercício para o leitor.

Note que um intervalo em um corpo ordenado é infinito, i.e., possui infinitos elementos. Vamos mostrar este fato. Primeiramente é fácil ver que $\forall\, x,\ y \in \mathbb{K}$, com $x < y$, segue que

$$x < \frac{x+y}{2} < y.$$

De fato, basta notar que

$$x = \frac{x+x}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{y+y}{2} = y.$$

Assim, dados $x, y \in \mathbb{K}$, com $x < y$, tome $x_0 = \dfrac{x+y}{2}$. Logo, temos $x < x_0 < y$. Da mesma forma, como $x < x_0$, tome $x_1 = \dfrac{x+x_0}{2}$. Portanto, $x < x_1 < x_0 < y$.

Seguindo este raciocínio por Indução Matemática, obtemos $x < ... < x_3 < x_2 < x_1 < x_0 < y$, ou seja, no intervalo de extremos x e y há infinitos pontos pertencentes a $\mathbb{K}$ (Obs.: Afirmamos aqui que cada elemento x_i, $i \in \mathbb{N}$ está em $\mathbb{K}$. Justifique esta observação).

2.7 Módulo ou valor absoluto

Definição 2.13 Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $x \in \mathbb{K}$. Chama-se *módulo* ou *valor absoluto* de x o maior dos valores $x, -x$, e indicamos

$$|x| = \max\{-x, x\}.$$

Considerando os elementos de $\mathbb{K}$ sobre uma reta, podemos dizer, geometricamente, que o módulo de x, $|x|$, representa a *distância* de x até a origem 0. Note que $\forall x \in \mathbb{K}$, $-|x| \leq x \leq |x|$. (Verifique!)

Uma outra maneira de se definir o módulo de um elemento $x \in \mathbb{K}$ é

$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0 \\ -x\,, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Teorema 2.14 Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $a, x \in \mathbb{K}$, com $a > 0$. São equivalentes as afirmações:

(i) $-a \leq x \leq a$;

(ii) $-x \leq a$ *e* $x \leq a$*;*

(iii) $|x| \leq a$.

Demonstração. Note que podemos provar todas as afirmações simultaneamente:

$$-a \leq x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \text{ e } x \leq a \Leftrightarrow -x \leq a \text{ e } x \leq a \Leftrightarrow |x| \leq a.$$

Note que a última bicondicional foi devido ao fato de $|x|$ ser o máximo dos elementos x e $-x$. Isto Prova o teorema.

□

Corolário 2.15 Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $a, b, x \in \mathbb{K}$, com $b > 0$. Então

$$|x - a| \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b.$$

Demonstração. Basta usar o teorema acima. De fato,

$$|x - a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x - a \leq b.$$

Pela monotonicidade da adição para $\leq$, somando a a toda a *cadeia de desigualdades* acima, obtemos

$$a - b \leq x \leq a + b,$$

que conclui a prova do corolário.

□

Obs.: Significado geométrico de $|x-a| \leq b$**.** Geometricamente, definindo o conjunto $X = \{x \in \mathbb{K} : |x - a| \leq b\}$, tal conjunto respresenta todos os pontos $x \in \mathbb{K}$ cuja distância de a é menor ou igual a b, ou seja, trançando-se uma reta que represente o corpo ordenado $\mathbb{K}$, temos que X é um intervalo *centrado* em a de *raio* b, uma vez que $\forall x \in X$, $-b \leq x-a \leq b$, e portanto $a-b \leq x \leq a+b$.

Teorema 2.16 Sejam $x, a \in \mathbb{K}$ com $a > 0$ e $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. São equivalentes:

(i) $|x| \geq a$*;*

(ii) $x \leq -a$ *ou* $x \geq a$.

Antes de provar este teorema, observe que este é justamente o "contrário" do teorema (2.14).

Demonstração. Considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{K} : |x| < a\}$. Note que este conjunto é o conjunto de todos os elementos que satisfazem o Teorema 2.14, considerando a desigualdade estrita.

Assim, os elementos que não obedecem ao Teorema 2.14 satisfazem $x \leq -a$ ou $x \geq a$ e estarão, portanto, fora de X, ou seja, em $X^{\complement}$. Repare ainda que

$$X^{\complement} = \{x \in \mathbb{K} : |x| \not< a\} = \{x \in \mathbb{K} : |x| \geq a\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{K} : x \leq -a \quad \text{ou} \quad x \geq a\}.$$

Ou seja, concluímos que $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$, o que prova o teorema.

$\square$

O teorema seguinte encerra propriedades fundamentais sobre módulo.

Teorema 2.17 Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Então, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$, valem as propriedades:

(*i*) $|x + y| \leq |x| + |y|$; (conhecida como *desigualdade triangular*)

(*ii*) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(*iii*) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$;

(*iv*) $|x - y| \geq |x| - |y|$.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é ordenado.
(*i*) Note que, de acordo com a definição de módulo, temos

$$-|x| \leq x \leq |x| \tag{2.1}$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|. \tag{2.2}$$

Somando (2.1) e (2.2), obtemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

que é justamente, de acordo com o teorema (2.14),

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Logo, vale (*i*).

(*ii*) Primeiramente, notemos que, $\forall x \in \mathbb{K}$, $x^2 = |x|^2$. De fato, basta observar que $|x| = \max\{-x, x\}$, então $|x|^2 = (\max\{-x, x\})^2 = x^2$, pois $(-x)^2 = x^2$. Assim, temos

$$|x \cdot y|^2 = (x \cdot y)^2 = x^2 y^2 = |x|^2 |y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2.$$

Logo, segue que $|x \cdot y| = \pm |x| \cdot |y|$. Como $|x \cdot y|$, $|x|$, $|y|$ são todos não negativos, segue que

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

donde vale (*ii*).

(*iii*) Basta notar que $-y + y = 0$ e, assim

$$|x - z| = |x - y + y - z| = |(x - y) + (y - z)|.$$

Aplicando agora a propriedade (i) obtemos

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|,$$

o que prova (*iii*).

(*iv*) Vamos fazer o mesmo “truque sujo” feito acima:

$$|x| = |x - y + y| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Logo, subtraindo $|y|$ nesta desigualdade obtemos

$$|x| - |y| \leq |x - y|,$$

que conclui a prova de (*iv*).

Isto conclui a prova do teorema.

□

Proposição 2.18 Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $a \in \mathbb{K}$ um elemento qualquer. Então, vale a igualdade

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Demonstração. Se $a \geq 0$ não temos nada a fazer (é imediato). Se $a < 0$, então, $|a| = -a$. Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$. Estaremos então no primeiro caso (de $a \geq 0$). Passando a raiz quadrada, obtemos

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{|a|^2} = |a|.$$

Isto conclui a prova da Proposição.

□

2.8 Corpo dos números reais

Como motivação para esta seção, consideremos um corpo ordenado $\mathbb{K}$ e o subconjunto definido pelo intervalo $(0, 1]$. Repare que este intervalo possui como elemento máximo o valor 1, mas não possui elemento mínimo. Para sanar esta dificuldade iremos definir o *ínfimo* e o *supremo* de um conjunto.

Seja X um subconjunto de um corpo ordenado $\mathbb{K}$. Temos as seguintes definições:

Definição 2.19 Dizemos que X é *limitado superiormente* se existir $b \in \mathbb{K}$ tal que $x \leq b$, $\forall x \in X$. Ou seja, temos que $X \subset (-\infty, b]$ e neste caso, dizemos que b é uma *cota superior* para o conjunto X.

Repare que se X tem uma cota superior b, então ele tem infinitas cotas superiores: $x \leq b < b + 1 < b + 2 < ...$

Definição 2.20 Dizemos que X é *limitado inferiormente* se existir $a \in \mathbb{K}$ tal que $x \geq a$, $\forall x \in X$. Ou seja, temos que $X \subset [a, +\infty)$ e neste caso, dizemos que a é uma *cota inferior* para o conjunto X.

Repare também que se X tem uma cota inferior a, então ele tem infinitas cotas inferiores: $x \geq a > a - 1 > a - 2 > ...$

Definição 2.21 Um subconjunto X de um corpo ordenado chama-se *limitado* se for limitado superiormente e inferiormente, i.e., se $\exists a, b \in \mathbb{K}$ tais que $X \subset [a, b]$.

Exemplo. Consideremos no corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais. Note que $\mathbb{N} \subset [0, +\infty)$, portanto, $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente em $\mathbb{Q}$ e temos que 0 é uma cota inferior para $\mathbb{N}$. Mas $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{Q}$, pois para qualquer $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, temos

$$\frac{p}{q} \leq \frac{|p|}{|q|} \leq |p| < |p| + 1 \in \mathbb{N},$$

ou seja, temos que $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\exists\, |p| + 1 \in \mathbb{N}$ tal que $|p| + 1 > \frac{p}{q}$. Em palavras: para qualquer número racional, sempre encontramos um número natural que é maior que o racional escolhido.

No que segue, apresentaremos as definições de *ínfimo* e *supremo* de um conjunto.

Definição 2.22 Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $X \subset \mathbb{K}$ um conjunto limitado superiormente. Dizemos que $M \in \mathbb{K}$ é *supremo* para o conjunto X quando ele for a menor das cotas superiores. Mais precisamente, $M \in \mathbb{K}$ é supremo para X se satisfizer os axiomas:

1. $\forall x \in X$, temos $x \leq M$; (i.e., M é uma cota superior para X)
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x_0 \in X$ tal que $M - \varepsilon < x_0 \leq M$. (i.e., M é a menor das cotas superiores para X).

Notação para o supremo: $M = \sup X$.

Definição 2.23 Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $X \subset \mathbb{K}$ um conjunto limitado inferiormente. Dizemos que $m \in \mathbb{K}$ é *ínfimo* para o conjunto X quando ele for a maior das cotas inferiores. Mais precisamente, $m \in \mathbb{K}$ é ínfimo para X se satisfizer os axiomas:

1. $\forall x \in X$, temos $x \geq m$; (i.e., m é uma cota inferior para X)
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x_0 \in X$ tal que $m \leq x_0 < m + \varepsilon$. (i.e., m é a maior das cotas inferiores para X).

Notação para o ínfimo: $m = \inf X$.

Observemos das definições acima um fato: se $X = \emptyset$, então qualquer $b \in \mathbb{K}$ serve como cota superior para X. Como num corpo ordenado não existe um menor elemento, concluímos que o conjunto vazio não possui supremo em $\mathbb{K}$. Analogamente quanto ao ínfimo.

Exemplo 1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e tomemos o intervalo $X = (a, b) \subset \mathbb{K}$.
Afirmação 01. $\inf X = a$:
De fato, observemos que:

(1) a é cota inferior para $X = (a, b)$:
Isto é imediato, pois, pela definição de $(a, b) = X$ segue que $\forall x \in X$, $x \geq a$.

(2) a é a maior cota inferior para X:
Dado $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon \in X$.
Então $a+\varepsilon$ não é cota inferior para X, pois se fosse, teríamos, $\forall x \in X$, $x \geq a+\varepsilon$.
Mas, como $x, a + \varepsilon \in X$, tomando $x_0 = \dfrac{(a+\varepsilon)+x}{2} \in X$, segue que $a + \varepsilon < x_0 \leq x$, com $x_0 \in X$.
Mas isto contradiz o fato de $a + \varepsilon$ ser cota inferior.
Logo, $a + \varepsilon$ não pode ser cota inferior para X, $\forall \varepsilon > 0$, ou seja, vale (2).
Com isto provamos a afirmação 01.
Afirmação 02. $\sup X = b$:
A demonstração desta afirmação é análoga à anterior. Fica como exercício.

$\square$

Exemplo 2. Considere o conjunto $X = \left\{ \dfrac{5n^2-5}{2n^2+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Vamos determinar o ínfimo e o supremo de X.

Primeiramente, denotando os elementos de X por x_n, $n \in \mathbb{N}$, observamos que $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{15}{11}$, etc. (é o que chamaremos de *uma sequência numérica*)

Afirmamos que $x_n < x_{n+1}$, para todo n. De fato, avaliando a diferença $x_{n+1} - x_n$, vamos obter

$$x_{n+1} - x_n = \frac{5(n+1)^2-5}{2(n+1)^2+3} - \frac{5n^2-5}{2n^2+3} = \frac{25(2n+1)}{(2(n+1)^2+3)(2n^2+3)} > 0, \ \forall n,$$

Logo, $x_1 = 0$ é o menor elemento do conjunto X, ou seja, o conjunto X possui um mínimo, donde segue que $\inf X = x_1 = 0$.

Como X não tem máximo, pois $x_{n+1} > x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, precisamos determinar o seu supremo.

Afirmamos que $\sup X = \frac{5}{2}$. De fato, temos que:

(i) $\forall x \in X$,

$$x = \frac{5n^2 - 5}{2n^2 + 3} \leq \frac{5n^2}{2n^2 + 3} \leq \frac{5n^2}{2n^2} = \frac{5}{2} := M,$$

ou seja, $M = \frac{5}{2}$ é uma cota superior para o conjunto X.

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, afirmamos que $\exists x_0 \in X$ tal que

$$\frac{5}{2} - \varepsilon < x_0 \leq \frac{5}{2},$$

onde $x_0 = \frac{5n_0^2 - 5}{2n_0^2 + 3}$, para um certo $n_0 \in \mathbb{N}$ (ou seja, que qualquer outra candidata a cota superior menos do que $M = \frac{5}{2}$ não serve).

De fato, se por absurdo tivermos que

$$\forall x \in X,\ x \leq \frac{5}{2} - \varepsilon,$$

então

$$\frac{5n^2 - 5}{2n^2 + 3} \leq \frac{5}{2} - \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ i.e.,}$$

$$\frac{5n^2 - 5}{2n^2 + 3} - \frac{5}{2} + \varepsilon \leq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

donde segue

$$\frac{-25 + (4n^2 - 6)\varepsilon}{2(2n^2 + 3)} \leq 0,$$

ou seja, temos um quociente que é não positivo, o que ocorre se, e somente se, o numerador for não positivo (pois o denominador é sempre positivo). Assim,

$$-25 + (4n^2 - 6)\varepsilon \leq 0 \Leftrightarrow n^2 \leq \frac{25}{4\varepsilon} + \frac{3}{2},$$

ou seja, se, e somente se,

$$n \leq \sqrt{\frac{25}{4\varepsilon} + \frac{3}{2}},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

um absurdo, pois "concluímos" que o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais seria limitado superiormente!

Logo, vale (ii)

Por (i) e (ii) segue que $\sup X = \frac{5}{2}$.

A Insuficiência do conjunto dos racionais

Um fato curioso que apenas mencionaremos aqui a respeito do conjunto dos racionais é o seguinte: **existem conjuntos limitados superiormente que não possuem supremo**. Por exemplo, o conjunto dado por

$$X = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \quad \text{ou} \quad (x \geq 0 \ \text{ e } \ x^2 \leq 2)\}$$

é limitado superiormente mas não possui supremo[3]. O fato acima mencionado se dá por força da inexistência de raízes quadradas racionais de certos números racionais. Só para ilustrar esta última observação, temos por exemplo a afirmação que segue.

Afirmação: Não existe número racional tal que seu quadrado seja 2. (em outras palavras: $\sqrt{2}$ não é racional).
Provemos esta afirmação. Por absurdo, suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Assim, $\exists p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \tag{2.3}$$

com mdc(p,q)=1 (isto para dizer que $\frac{p}{q}$ está na forma *irredutível*, ou seja, simplificada ao máximo, não havendo fatores primos em comum).
Elevando (2.3) ao quadrado, obtemos

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Logo, concluímos que p^2 é par e, portanto, segue que p também é par(verifique!), ou seja, $p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$. Com isso, obtemos

$$2 = \frac{(2m)^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 2m^2,$$

ou seja, q^2 também é par, donde segue que q é par, i.e., $q = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.
Logo, obtemos

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2m}{2n},$$

mas isto é um absurdo, pois mdc(p,q)=1.
Logo, $\sqrt{2}$ não é racional.

[3]Para mais detalhes veja o o livro do Elon, por exemplo.

$\square$

Vejamos um exemplo mais interessante:

Afirmação. O conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2,\, x > 0\}$ não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$!

De fato, defina o conjunto auxiliar

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\,,\, x > 0\}.$$

Como já mostramos na afirmação anterior, temos que não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. Logo, dado $r \in \mathbb{Q}^+$, segue que $r \in A$ ou $r \in B$.

Temos, pois, dois fatos a verificar:

Fato 1. se $x \in A$, então existe $y \in A$ tal que $y < x$.

Fato 2. se $x \in B$, então existe $y \in B$ tal que $x < y$.

Faremos a prova do Fato 1, visto que o outro é análogo. Assim, como $x \in A$, escreva $x = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Então $\left(\frac{p}{q}\right)^2 > 2$, ou seja, $p^2 - 2q^2 > 0$.

Tome $y = \dfrac{np-1}{nq}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que para n suficientemente grande teremos $y \in A$. De fato,

$$y \in A \Leftrightarrow \left(\frac{np-1}{nq}\right)^2 > 2 \Leftrightarrow (p^2 - 2q^2)n^2 - 2pn + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{p + q\sqrt{2}}{p^2 - 2q^2} > \frac{p}{p^2 - 2q^2}.$$

Ou seja, basta tomar $n > \frac{p}{p^2-2q^2}$ para que $y = \frac{np-1}{nq} \in A$.

Assim, $y \in A$ é tal que

$$y = \frac{np-1}{nq} = \frac{np}{nq} - \frac{1}{nq} < \frac{np}{nq} = \frac{p}{q} = x,$$

ou seja, $y < x$, e então vale o Fato 1.

Agora, suponha por absurdo que exista $x_0 = \inf A$.

Então, $x_0 \leq x$, $\forall x \in A$. Pelo Fato 1 segue que $x_0 \notin A$. Então $x_0 \in B$, e pelo Fato 2, existirá $z \in B$ tal que $z^2 < 2$ e então z é uma cota inferior para A, um absurdo!

Portanto, não existe $\inf A$, embora A seja limitado inferiormente!

Percebemos, então, que no corpo dos racionais existem "buracos", ou seja, existem conjuntos que, mesmo sendo limitados inferiormente, não possuem ínfimo e, também, existem conjuntos que são limitados superiormente mas não possuem supremo!

Queremos, porém, chegar a um corpo ordenado em que não haja essa problemática de insuficiência, como ocorre nos racionais. De fato, tal corpo será o *corpo dos Reais.* Como já foi mencionado, iremos apenas enunciar um axioma, pois foge de nossos propósitos construir este corpo. A título de curiosidade, há duas formas clássicas para construir o corpo dos reais a partir dos racionais: uma delas é através da noção de *cortes* e outra maneira é através de *sequências de Cauchy.*

Antes de continuar, porém, façamos uma outra representação para $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}$$

A esta representação dá-se o nome de *fração contínua.* Notemos que, como vimos acima, $\sqrt{2}$ não é racional e, portanto, a soma dada acima deve ser infinita, pois se fosse finita, $\sqrt{2}$ seria racional.

Tomando as seguintes aproximações da fração acima, por *truncamento*, temos $x_1 = 1$; $x_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} = 1,5$; $x_3 = 1 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{7}{5} = 1,4$;
$x_4 = ... = \dfrac{17}{12} = 1,41666...$; etc.
Ou seja, estamos aproximando o número $\sqrt{2}$ por uma *sequência* de racionais.

A seguir apresentamos a definição de corpo ordenado completo.

Definição 2.24 Dizemos que um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é *completo* quando todo subconjunto não vazio X, limitado superiormente possuir um supremo[4].

Note que, da definição acima, o corpo dos racionais não é completo por força da insuficiência. Finalmente, enunciaremos o axioma fundamental.

Axioma: Existe um corpo ordenado e completo, chamado *corpo dos números reais*, denotado por $\mathbb{R}$.

Assim, todas as propriedades estudadas em corpos ordenados valerão para o corpo ordenado dos reais.

Vejamos um exemplo de aplicação.

Exemplo. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ subconjunto não vazios e limitados superiormente. Defina o conjunto

$$A + B = \{a + b \,:\, a \in A \;\text{ e }\; b \in B\}.$$

Mostre que $A + B$ é não vazio, limitado superiormente e que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

[4]Uma outra maneira de dizer que um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é completo é quando toda sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ for convergente em $\mathbb{K}$, mas isto será estudado com cuidado mais adiante. Mesmo assim, continuando esta observação, note que $\mathbb{Q}$ não é completo pois a sequência (x_n) definida recursivamente por $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + x_n}$ é de Cauchy em $\mathbb{Q}$, porém ela converge para $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Disso segue que realmente $\mathbb{Q}$ não é completo.

Solução. Como $A, B \neq \emptyset$, existem $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$. Então, pela definição do conjunto $A + B$ segue que $A + B \neq \emptyset$, pois $a_0 + b_0 \in A + B$.

Além disso, como A e B são limitados superiormente e como $\mathbb{R}$ é completo, segue que existem $M = \sup A$ e $N = \sup B$. Assim, $\forall x \in A$, $x \leq M$ e $\forall y \in B$, $y \leq N$, e disso segue que

$$x + y \leq M + N, \quad \text{onde} \quad x + y \in A + B. \tag{2.4}$$

Ou seja, mostramos que $A + B$ também é limitado superiormente, e como $A + B \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é completo, segue que existe $\sup(A + B)$.

Resta mostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

De (2.4), temos que $x + y \leq M + N$, $\forall x + y \in A + B$, ou seja,

$$M + N = \sup A + \sup P$$

é cota superior para o conjunto $A + B$, e como $\sup(A + B)$ será a menor das cotas superiores, segue que

$$\sup(A + B) \leq M + N = \sup A + \sup B. \tag{2.5}$$

Resta mostrar a contenção contrária. Dado $\varepsilon > 0$, temos que

$$\exists x_1 \in A \ \text{ tal que } \ x_1 > M - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.6}$$

onde $M = \sup A$, e

$$\exists y_1 \in B \ \text{ tal que } \ y_1 > N - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.7}$$

onde $N = \sup B$.

Assim, somando (2.6) e (2.7), obtemos

$$x_1 + y_1 > M - \frac{\varepsilon}{2} + N + \frac{\varepsilon}{2} = M + N + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,$$

i.e.,

$$x_1 + y_1 > (M + N) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Como $\sup(A+B) \geq x_1 + y_1$, segue que

$$\sup(A+B) > (M+N) - \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,$$

ou seja, obtemos

$$\sup(A+B) \geq M + N = \sup A + \sup B. \tag{2.8}$$

De (2.5) e (2.8) segue a igualdade desejada.

2.9 Densidade

Definição 2.25 Dizemos que um subconjunto X de $\mathbb{R}$ é *denso* em $\mathbb{R}$ quando, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, existir $x \in X$ tal que $a < x < b$.

Teorema 2.26 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$. Então, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$ (ou seja, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$).*

Demonstração. Sem perda de generalidade, assuma que $x > 0$. Então, temos $y - x > 0$.

Como $\mathbb{R}$ é arquimediano[5], segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < y - x$, ou seja,

$$1 < n_0 y - n_0 x.$$

Então

$$n_0 x + 1 < n_0 y. \tag{2.9}$$

Como $n_0 x > 0$, segue que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m - 1 \leq n_0 x < m. \tag{2.10}$$

Somando 1 e usando (2.9), vem

$$m \leq n_0 x + 1 < n_0 y \Rightarrow m < n_0 y,$$

[5] Veja no livro do Elon.

ou seja,

$$y > \frac{m}{n_0}. \tag{2.11}$$

Ainda, de (2.10), temos $n_0 x < m$, donde vem:

$$x < \frac{m}{n_0}. \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12) segue que, tomando $r = \frac{m}{n_0} \in \mathbb{Q}$, $x < r < y$.

□

Denotando por $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.27 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$. Então, existe $z \in \mathbb{I}$ tal que $x < z < y$ (ou seja, o conjunto $\mathbb{I}$ dos irracionais é denso em $\mathbb{R}$).*

Demonstração. Como $x < y$ são reais, considere os números reais: $\frac{x}{\sqrt{2}}$ e $\frac{y}{\sqrt{2}}$. Como $x < y$, segue que $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Pelo Teorema da densidade dos racionais em reais acima, segue que $\exists r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}},$$

e então

$$x < r\sqrt{2} < y,$$

onde $z := r\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, como queríamos mostrar.

□

Capítulo 3

Cardinalidade e enumerabilidade

3.1 Conjuntos equivalentes

Definição 3.1 Dizemos que dois conjuntos A e B são *equivalentes* ou *possuem a mesma potência*, e escrevemos $A \sim B$, se existir $f : A \to B$ bijetora.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de conjuntos equivalentes.

Exemplos.
(a) O conjunto dos números pares $P = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$ é equivalente ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, pois basta definir $f : \mathbb{N} \to P$ por $f(x) = 2x$, que obviamente é uma bijeção.

(b) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. De fato, basta definir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, pondo

$$f(k) = \begin{cases} -\frac{k+1}{2} & \text{se } k \text{ é ímpar,} \\ \frac{k}{2} & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}$$

uma bijeção.

(c) $(0,1) \sim \mathbb{R}$. De fato, note que $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \tan x$ é bijetora e que $f : (0,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dada por $f(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$ é bijetora, e como vimos no Corolário 1.38, sendo a composição de funções bijetoras também bijetora, concluímos que $g \circ f : (0,1) \to \mathbb{R}$ é uma bijeção, donde segue que $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

Um resultado básico sobre conjuntos equivalentes é a proposição abaixo.

Proposição 3.2 *A equivalência (i.e., potência) entre conjuntos é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, valem as propriedades:*

(a) $A \sim A$*;*

(b) $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$*;*

(c) se $A \sim B$ *e* $B \sim C$*, então,* $A \sim C$*.*

Demonstração. A prova de (a) é trivial, basta considerar a aplicação identidade $id : A \to A$, $id(x) = x$, que é bijetora. Logo, $A \sim A$.
Provemos (b). Se $A \sim B$, então, existe $f : A \to B$ bijetora. Sendo bijetora, ela é inversível, ou seja, existe $f^{-1} : B \to A$ bijeção, donde segue que $B \sim A$. A recíproca é análoga.
Por fim, provemos (c). Suponha que $A \sim B$ e $B \sim C$. Logo, existem $f : A \to B$ e $g : B \to C$ bijeções. Como a composição de funções bijetoras é bijetora, temos que $g \circ f : A \to C$ também é bijetora, donde segue que $A \sim C$.

□

3.2 Cardinalidade

Definição 3.3 Um conjunto *infinito* é todo aquele que é equivalente a um subconjunto próprio[1] de si mesmo. Caso contrário, é chamado de conjunto *finito*.

Por exemplo, $\mathbb{R}$ é um conjunto infinito, pois, por exemplo, $(0,1) \subset \mathbb{R}$, $(0,1) \neq \emptyset$, $(0,1) \neq \mathbb{R}$ e $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

[1]Dizemos que um subconjunto S de X é *próprio* em X se $S \subset X$ com $S \neq X$ e $S \neq \emptyset$.

Da mesma forma, temos que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito, pois $P \subset \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \sim P$, onde $P = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$ denota o conjunto de todos os números pares não negativos.

Dado um conjunto finito $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ com n elementos, temos que qualquer outro conjunto finito $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, também com n elementos, será equivalente ao conjunto A, pois basta considerar a correspondência bijetora $f : A \to B$ dada por

$$f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2, ..., f(a_n) = b_n.$$

Definição 3.4 Dizemos que dois conjuntos A e B têm a mesma *cardinalidade* ou o mesmo *número cardinal*, e escrevemos card $A =$ card B, se, e somente se, eles tiverem a mesma potência (i.e., se forem equivalentes).

Dessa forma, como vimos na seção anterior, temos que card $\mathbb{N} =$ card $\mathbb{Z}$ e que card $\mathbb{R} =$ card $(0, 1)$.

As notações para indicar o número cardinal de um dado conjunto X podem ser: $\operatorname{card} X$, $|X|$ ou $\overline{X}$. Usaremos neste livro a primeira notação, que foi dada na definição.

Quando o conjunto X for finito, a cardinalidade de X corresponderá ao número de elementos de X. Assim, por exemplo,

- $\operatorname{card} \emptyset = 0$;
- $\operatorname{card} \{\emptyset\} = 1$;
- $\operatorname{card} \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2$;
- $\operatorname{card} \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 3$;
- $\cdots$

Cantor denotou o cardinal do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais por $\aleph_0$, ou seja,

$$\operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0.$$

$\aleph_0$ é o primeiro número cardinal infinito. O símbolo $\aleph$ (lê-se *aleph*) é a primeira letra do alfabeto hebraico.

Pelo definido acima e as observações anteriores, temos, por exemplo, que $\operatorname{card}\mathbb{N} = \aleph_0$ e $\operatorname{card}\mathbb{Z} = \aleph_0$. Ou seja, os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ estão numa mesma classe, na classe do cardinal $\aleph_0$.

Os números cardinais de conjuntos infinitos são chamados *números transfinitos* ou *números cardinais infinitos.*

Outra definição importante que temos é a seguinte:

Definição 3.5 Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que a cardinalidade de A é *menor ou igual* à cardinalidade de B, e escrevemos $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card}\ B$, se existir um subconjunto $S \subset B$, tal que $A \sim S$, ou seja, se existir $f : A \to B$ injetora (e daí, $\tilde{f} : A \to f(A) := S$ bijetora). Também dizemos que a cardinalidade de A é *maior ou igual* à cardinalidade de B, e escrevemos $\operatorname{card} A \geq \operatorname{card} B$, se existir uma função sobrejetora $g : A \to B$.

A seguir, apresentamos o enunciado de um Lema técnico que será importante para a prova do próximo teorema.

Lema 3.6 *Sejam A_1, A e B conjuntos, tais que $A_1 \subseteq B \subseteq A$. Se* $\operatorname{card} A_1 = \operatorname{card} A$*, então,* $\operatorname{card} B = \operatorname{card} A$.

Demonstração. (Inspirado de [**?**], página 159). Como $\operatorname{card} A_1 = \operatorname{card} A$, segue que existe $f : A \to A_1$ bijetora e daí, $A \sim A_1$.
Como $B \subset A$, temos que existe $f|_B : B \to A_1$ injetora e, portanto, $f|_B : B \to f(B) := B_1$ é bijetora, ou seja, $B \sim B_1$, com $B_1 \subset A_1$. Assim, obtemos

$$B_1 \subset A_1 \subset B \subset A.$$

Note que $B_1 \subset A \subset B$ com $B \sim B_1$. Assim, como $A_1 \subset B$, temos que existe $g : A_1 \to B$ injetora e, portanto, $g : A_1 \to f(A_1) := A_2$ é bijetora (note que $A_2 \subset B \sim B_1$), daí, $A_1 \sim A_2$ e

$$A_2 \subset B_1 \subset A_1 \subset B \subset A.$$

Continuando, existem conjuntos equivalentes

$$A \sim A_1 \sim A_2 \sim ... \text{ e } B \sim B_1 \sim B_2 \sim ...,$$

tais que

$$... \subset B_3 \subset A_3 \subset B_2 \subset A_2 \subset B_1 \subset A_1 \subset B \subset A$$

e $f : A_k \to A_{k+1}$ e $g : B_k \to B_{k+1}$ bijetoras. Seja

$$Z = A \cap B \cap A_1 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_2 \cap ...,$$

então,

$$A = (A \setminus B) \cup (B \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup ... \cup Z$$

$$B = (B \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_2) \cup ... \cup Z$$

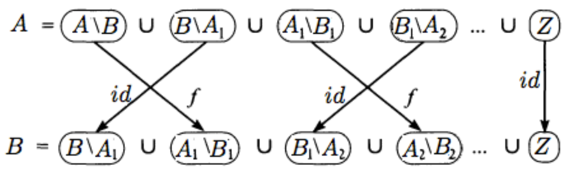
Portanto,

$$A \setminus B \sim A_1 \setminus B_1 \sim A_2 \setminus B_2 \sim ...$$

De fato, a função $f : A_k \setminus B_k \to A_{k+1} \setminus B_{k+1}$ é bijetora.
Considere a função $g : A \to B$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_k \setminus B_k \text{ ou } x \in A \setminus B \\ x & \text{se } x \in B_k \setminus A_k \text{ ou } x \in Z \end{cases}$$

Então, g é bijetora, e portanto, $B \sim A$, ou seja, $\operatorname{card} B = \operatorname{card} A$.



□

Teorema 3.7 *(Cantor-Bernstein) Sejam X e Y conjuntos, tais que* $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ *e* $\operatorname{card} Y \leq \operatorname{card} X$. *Então,* $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.

Demonstração. Como $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$, segue que existe $f : X \to Y$ injetora.

Do mesmo modo, como $\operatorname{card} Y \leq \operatorname{card} X$, segue que existe $g : Y \to X$ injetora.

Logo, temos que a composição $g \circ f : X \to X$ também é injetora.

Note que
$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) \subseteq g(Y) \subseteq X. \tag{3.1}$$
Sendo $g \circ f : X \to X$ injetora, temos que $g \tilde{\circ} f : X \to g(f(X))$ é bijetora, e daí temos que X e $g(f(X))$ são equivalentes, logo
$$\operatorname{card} X = \operatorname{card}\,(g(f(X))). \tag{3.2}$$

Do mesmo modo, sendo $g : Y \to X$ injetora, temos que $\tilde{g} : Y \to g(Y)$ é bijetora e daí, temos que $Y \sim g(Y)$, ou seja,
$$\operatorname{card} Y = \operatorname{card}\,(g(Y)). \tag{3.3}$$

Observando (3.1) e (3.2), segue do lema 3.6 que
$$\operatorname{card}\,(g(Y)) = \operatorname{card} X,$$
e como vale também (3.3), concluímos que $\operatorname{card} Y = \operatorname{card} X$.

□

O Teorema de Cantor-Bernstein acima pode parecer, no seu enunciado, bastante trivial, mas podemos observá-lo de uma forma mais interessante: como $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ nos diz que existe uma $f : X \to Y$ injetiva e que $\operatorname{card} Y \leq \operatorname{card} X$ nos diz que existe uma $g : Y \to X$ injetiva, o Teorema acima pode ser reformulado como:

Teorema 3.7'. *Se existirem $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ injetoras, então, existe uma bijeção $h : X \to Y$.*

Proposição 3.8 *Se X é um conjunto infinito, então,* $\operatorname{card}\ X > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n.
(i) card $X \geq 1$. De fato, como X é infinito, escolha qualquer $x \in X$ e daí, temos que $1 \mapsto x$ define uma injeção de $\{1\}$ em X, ou seja, $\exists f : \{1\} \to X$ injetora, portanto,

$$\operatorname{card} X \geq \operatorname{card}\ \{1\} = 1,$$

ou seja, vale a base da indução.

(ii) Suponha que a afirmação seja verdadeira para um certo $n = k$ fixado, ou seja, que $\operatorname{card} X \geq k$. Precisamos mostrar que $\operatorname{card} X \geq k+1$.

Como $\operatorname{card} X \geq k$, segue que existe uma função $f : \{1, ..., k\} \to X$ injetora.

Como X é infinito, segue que $\exists x \in X \setminus \operatorname{Im} f$.

Defina $g : \{1, ..., k, k+1\} \to X$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(a) & \text{se} \quad a \in \{1, 2, ..., k\} \\ x & \text{se} \quad a = k+1 \end{cases}$$

Assim, g é obviamente injetora de $\{1, ..., k, k+1\}$ em X. Logo, card $X \geq k+1$.

Portanto, card $X > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

3.3 Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis

Os conjuntos infinitos podem ser classificados em *enumeráveis* e *não enumeráveis*, c.f. a definição abaixo.

Definição 3.9 Dizemos que um conjunto A é *enumerável* ou *contável*, se é finito ou se existir $f : A \to \mathbb{N}$ bijeção, ou seja, se A for equivalente ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Caso contrário, A chama-se *não enumerável*.

Como a definição acima nos diz, um caso de um conjunto ser enumerável é quando ele for finito. Esse caso é simples e não nos preocuparemos aqui. O caso interessante é quando o conjunto em questão é infinito. Nesse caso, devemos obter uma bijeção deste com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Em outras palavras, um conjunto infinito é dito ser enumerável se todos os seus elementos podem ser listados, tais como os elementos do conjunto dos naturais o são: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Ou ainda, um conjunto X será enumerável se ele estiver na classe do número cardinal $\aleph_0$, i.e., se $\operatorname{card} X = \aleph_0$.

Exemplos. Pelos exemplos (a) e (b) analisados na seção anterior, temos que $\mathbb{Z}$ e $P = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ são enumeráveis. Analogamente, o conjunto dos ímpares positivos também é enumerável. Obviamente, o próprio conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é enumerável, visto que a aplicação identidade $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $id(n) = n$, é uma bijeção.

Proposição 3.10 *Se A e B forem conjuntos enumeráveis, então, $A \cup B$ será enumerável.*

Demonstração. Sendo A e B enumeráveis, segue que existem $f : A \to \mathbb{N}$ e $g : B \to \mathbb{N}$ bijetoras.

Defina $h : A \cup B \to \mathbb{N}$ por

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) & \text{se } x \in A, \\ 2g(x) + 1 & \text{se } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Observe que $h(A) \cap h(B \setminus A) = \emptyset$, pois, por construção, temos que os elementos de $h(A)$ são números pares e os elementos de $h(B \setminus A)$ são números ímpares. Note também que h é bijetora, donde segue que $A \cup B$ é enumerável. $\square$

Podemos estender o resultado acima para um número finito de conjuntos, c.f. o resultado abaixo.

Corolário 3.11 *A união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração. Sejam $A_1, A_2, ..., A_k$ enumeráveis, onde k é finito. Assim, podemos listar todos os elementos de todos esses k conjuntos:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, ...\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, ...\}$$

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, ...\}$$

$$\vdots$$

$$A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, ...\}$$

Em seguida, montamos o conjunto união $A = \cup_{j=1}^{k} A_j$ da seguinte forma: como cada coluna do esquema acima é finita com k elementos, listamos primeiramente todos os primeiros termos a_{i1}, $i = 1, 2, ..., k$, em seguida, listamos todos os segundos termos a_{i2}, $i = 1, 2, ..., k$, e assim por diante. Conseguimos, então, montar uma lista infinita

$$A = \{a_{11}, a_{21}, ..., a_{k1}, a_{12}, a_{22}, ..., a_{k_2}, a_{13}, a_{23}, ...a_{k3}, ...\}$$

que contém todos os elementos de todos os A_i, $i = 1, 2, ...k$, ou seja, $A = \cup_{j=1}^{k} A_j$ é enumerável.

□

A Proposição 3.10 pode ser provada também usando a ideia da prova do Corolário acima. Fica como exercício.

O Corolário anterior pode ser estendido para uma união enumerável de enumeráveis, c.f. a Proposição que segue.

Proposição 3.12 *A união enumerável de enumeráveis é enumerável, i.e., se* A_n *é enumerável,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, então,* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *é enumerável.*

Demonstração. Sejam $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ uma coleção enumerável de conjuntos enumeráveis. Assim, cada um dos conjuntos A_j, $j \in \mathbb{N}$, pode ter seus respectivos elementos apresentados numa lista. Iremos denotar por $A_j =$

$\{a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, ...\}$ a enumeração do conjunto A_j, para cada j natural. Assim, temos as enumerações:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, ...\}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, ...\}, \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, ...\}, \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

A união de todos os A_j, denotada por $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, é o conjunto formado por todos os elementos de todos os $A_j's$, os quais podem ser postos numa lista infinita, considerando o seguinte diagrama, onde cada linha j corresponde à enumeração do conjunto A_j:

$$\begin{tikzcd}
a_{11} \arrow[d] & a_{12} \arrow[r] & a_{13} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{21} \arrow[ur] & a_{22} \arrow[dl] & a_{23} \arrow[ur] & \cdots \\
a_{31} \arrow[d] & a_{32} \arrow[ur] & a_{33} & \cdots \\
a_{41} \arrow[ur] & a_{42} & a_{43} & \cdots \\
\vdots & & &
\end{tikzcd}$$

Ou seja, montamos a enumeração

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{41}, a_{32}, ...\},$$

donde segue que é enumerável, ou seja, a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

□

A seguir, apresentamos alguns resultados importantes sobre enumerabilidade.

Teorema 3.13 *Todo subconjunto do conjunto dos naturais é enumerável, i.e., se $X \subset \mathbb{N}$, então, X é enumerável.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se X for finito já será enumerável. Suponha, então, que X seja infinito. Assim, defina a função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo

$$f(1) = \min X,$$

$$f(2) = \min\{X \setminus \{f(1)\}\},$$

$$f(3) = \min\{X \setminus \{f(1), f(2)\}\},$$

$$\vdots$$

onde $\min Z$ denota o mínimo do conjunto Z. Logo, temos que f é injetiva. Além disso, temos que tal f é crescente, ou seja,

$$f(1) < f(2) < f(3) < ...$$

Resta mostrar que f é sobrejetiva. Para isso, dado $n_0 \in X$, basta mostrar que $n_0 \in \{f(1), ..., f(n_0)\}$. Antes, porém, precisamos provar a afirmação:

Afirmação: $n \leq f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Provamos tal afirmação por indução sobre n. De fato, temos que

(i) $f(1) = \min X \geq 1$, ou seja, temos que $1 \leq f(1)$. Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que a desigualdade seja verdadeira para $n = k$, i.e., vale que $k \leq f(k)$. Precisamos mostrar que $k + 1 \leq f(k + 1)$. De fato, avaliando a diferença:

$$f(k+1) - (k+1) = f(k+1) - k - 1 \geq f(k+1) - f(k) - 1 \geq 1 - 1 \geq 0,$$

ou seja, $f(k+1) \geq k+1$.

Assim, por (i) e (ii) segue por indução matemática a prova da afirmação.

Continuemos na prova da sobrejetividade da f. Por absurdo, suponha que $n_0 \notin \{f(1), ..., f(n_0)\}$. Então, segue que $n_0 \in X \setminus \{f(1), ..., f(n_0)\}$. Logo, segue que

$$f(n_0 + 1) \leq n_0, \tag{3.4}$$

Mas pela afirmação acima, temos que, em particular,

$$n_0 \leq f(n_0). \tag{3.5}$$

Logo, de (3.4) e (3.5), temos

$$f(n_0 + 1) \leq n_0 \leq f(n_0) \Rightarrow f(n_0 + 1) \leq f(n_0),$$

mas isto é um absurdo, pois f é crescente. Portanto, f é também sobrejetora. Assim, concluímos que $f : \mathbb{N} \to X$ é bijetora. Portanto, X é enumerável.

□

Proposição 3.14 *Seja $f : A \to B$ injetiva. Se B é enumerável, então, A é enumerável.*

Demonstração. Como B é enumerável, segue que existe $g : B \to \mathbb{N}$ bijeção. Em particular, temos que g é injetora.

Como $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{N}$ são injetoras, segue que a composta $g \circ f : A \to \mathbb{N}$ também é injetora. Assim, a função $v = g \circ f : A \to (g \circ f)(A) \subset \mathbb{N}$ é bijetora.

Além disso, como $(g \circ f)(A) \subset \mathbb{N}$, segue do teorema anterior que $(g \circ f)(A)$ é enumerável. Logo, existe $h : (g \circ f)(A) \to \mathbb{N}$ bijeção.

Como a composição de bijeções é uma bijeção, temos que $h \circ v : A \to \mathbb{N}$ é bijetora, donde segue que A é enumerável.

□

Proposição 3.15 *Seja $f : A \to B$ sobrejetiva. Se A for enumerável, então, B também será enumerável.*

Demonstração. Como f é sobrejetora, então, $\forall z \in B$, escolha $x \in A$ tal que $f(x) = z$ e ponha $g(z) = x$.

Isto define $g : B \to A$, tal que $f(g(z)) = f(x) = z$, $\forall z \in B$. Então, g é injetiva. E como A é enumerável, segue pelo corolário anterior que B é enumerável.

$\square$

Da proposição acima, segue o corolário:

Corolário 3.16 *Seja $f : A \to B$ sobrejetiva. Se B for não enumerável, então, A é não enumerável.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que A seja enumerável. Assim, segue que existe uma função $g : \mathbb{N} \to A$ bijetora. Em particular, temos que g é sobrejetora.

Defina agora a função $h : \mathbb{N} \to B$ por $h(x) = (f \circ g)(x)$.

Note que h é sobrejetora, pois é uma composição de funções sobrejetoras.

Logo, obtemos $h : \mathbb{N} \to B$ sobrejetora com $\mathbb{N}$ enumerável, donde segue pela proposição 3.15 que B é enumerável. Mas, temos, por hipótese, que B é não enumerável. Absurdo! Portanto, A é não enumerável.

$\square$

Proposição 3.17 *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isto, basta observar o diagrama, onde vemos que é possível percorrer (listar) todos os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, c.f. as setas indicam no esquema:

$$\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[d] & (1,2) \arrow[r] & (1,3) \arrow[dl] & \cdots \\
(2,1) \arrow[ur] & (2,2) \arrow[dl] & (2,3) \arrow[ur] & \cdots \\
(3,1) \arrow[d] & (3,2) \arrow[ur] & (3,3) & \cdots \\
(4,1) \arrow[ur] & (4,2) & (4,3) & \cdots \\
\vdots & & &
\end{tikzcd}$$

Isto indica que podemos definir $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pondo

$$\varphi(1) = (1,1),\ \varphi(2) = (2,1),\ \varphi(3) = (1,2),\ \varphi(4) = (1,3),\ \varphi(5) = (2,2),\ ...$$

uma bijeção.

Logo, temos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Como $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$, dada por

$$f(m,n) = \frac{m}{n},$$

é sobrejetora, devido à enumerabilidade de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, segue pela Proposição 3.15 que $\mathbb{Q}^+$ é enumerável.

Analogamente, mostramos que o conjunto dos números racionais negativos $\mathbb{Q}^-$ é enumerável. Agora, como

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-,$$

e a união finita de enumeráveis é enumerável, segue que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

$\square$

Vimos acima que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. De fato, temos o resultado mais geral com relação à enumerabilidade em produtos cartesianos:

Proposição 3.18 *Sejam A e B dois conjuntos enumeráveis. Então, $A \times B$ também é enumerável.*

Demonstração. Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Então, temos que existem funções $f : A \to \mathbb{N}$ e $g : B \to \mathbb{N}$ bijetivas.
Com isso, defina $h : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por

$$h(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Afirmamos que h é injetiva. De fato, dados (x, y) e (a, b) em $A \times B$, tais que

$$h(x, y) = h(a, b),$$

temos que

$$h(x, y) = h(a, b) \Rightarrow (f(x), g(y)) = (f(a), g(b)),$$

e pela igualdade dos pares ordenados, segue que $f(x) = f(a)$ e $g(y) = g(b)$. Como f e g são injetivas (pois são bijetivas), segue que $x = a$ e $y = b$, ou seja, obtemos

$$(x, y) = (a, b).$$

Portanto, h é injetora.

Assim, temos $h : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ injetora. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, segue pela Proposição 3.14 que $A \times B$ é enumerável.

$\square$

A proposição acima pode ser ampliada no seguinte resultado:

Corolário 3.19 *O produto cartesiano finito de n conjuntos enumeráveis é enumerável, i.e., se $A_1, A_2, ..., A_n$ são n (n finito) conjuntos enumeráveis, então,*

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times ... \times A_n$$

é enumerável.

Infelizmente, o Corolário acima não pode ser estendido para um produto cartesiano enumerável, ou seja, temos a proposição abaixo, cuja demonstração deixamos como exercício, visto que é necessário ver o *método da diagonal de Cantor* para sua prova, e esse método será dado na Proposição 3.22.

Proposição 3.20 *O produto cartesiano enumerável de conjuntos enumeráveis é não enumerável.*

Proposição 3.21 $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Demonstração. De fato, como

$$\aleph_0 = \operatorname{card}\mathbb{N} = \operatorname{card}(\mathbb{N} \times \{1\}) = \operatorname{card}(\mathbb{N} \times \{2\}),$$

segue que

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \operatorname{card}(\mathbb{N} \times \{1\} \cup \mathbb{N} \times \{2\}) = \aleph_0,$$

pois $\mathbb{N} \times \{1\} \cup \mathbb{N} \times \{2\}$ é uma união enumerável de enumeráveis.

□

O resultado abaixo nos fornece um importante exemplo de conjunto não enumerável.

Proposição 3.22 *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável.*

Demonstração. Para provar isto, é suficiente mostrar que $(0, 1)$ é não enumerável, visto que $(0, 1) \sim \mathbb{R}$. Faremos uma prova por absurdo. Usaremos um método chamado de *método da diagonal de Cantor.*

Suponha, por absurdo, que $(0, 1)$ é enumerável. Assim, temos que os elementos de $(0, 1)$ podem ser listados, ou seja,

$$(0, 1) = \{x_1, x_2, x_3, ...\},$$

onde

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...$$

$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...$$

$$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}...$$
$$\vdots$$
$$x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}...$$
$$\vdots$$

tal que $a_{ij} \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ e cada decimal x_i possui um número infinito de elementos diferentes de zero, ou seja, representaremos, por exemplo,

$$0, 50000... = 0, 49999...$$

Construímos o seguinte número decimal:

$$z = 0, b_1b_2b_3...,$$

tal que $b_1 \neq a_{11}$ e $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq a_{22}$ e $b_2 \neq 0$, e assim por diante.

Logo, temos que $z \in (0, 1)$.

Por outro lado, observe que $z \neq x_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, visto que $b_i \neq a_{ii}$ e $b_i \neq 0$. Logo, temos que $z \notin (0, 1)$. Absurdo! Assim, $(0, 1)$ é não enumerável.

$\square$

A Proposição acima nos diz que existem conjuntos que possuem cardinalidade maior que $\aleph_0$, a cardinalidade dos conjuntos enumeráveis. Motivados pelo resultado acima, definimos:

Definição 3.23 A classe dos conjuntos não enumeráveis equivalentes a $\mathbb{R}$ chama-se número cardinal $\mathfrak{c}$, denominado *potência do contínuo* ou *contínuo*.

Na Matemática, em especial na teoria dos conjuntos, a cardinalidade do contínuo é a cardinalidade do conjunto dos números reais. Esse cardinal costuma ser representado por $\mathfrak{c}$. Assim, card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$. Pelo estudado anteriormente concluímos que card $(a, b) = \mathfrak{c}$, pois todo intervalo aberto é equivalente ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Proposição 3.24 *O conjunto dos números irracionais é não enumerável.*

Demonstração. De fato, denotemos por $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais. Por absurdo, se $\mathbb{I}$ fosse enumerável, então, como

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I},$$

concluiríamos que $\mathbb{R}$ deveria ser enumerável, pois seria uma união de conjuntos enumeráveis. Mas, isto é um absurdo pela Proposição 3.22.

□

Proposição 3.25 *A cardinalidade do conjunto dos números irracionais é maior do que $\aleph_0$, ou seja,* $\operatorname{card} \mathbb{I} > \aleph_0$.

Demonstração. Escreva $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por absurdo, suponha que $\operatorname{card}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \leq \aleph_0$. Como $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ é uma união disjunta, segue que

$$\operatorname{card} \mathbb{R} = \operatorname{card}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) + \operatorname{card} \mathbb{Q} \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0,$$

ou seja, teríamos que $\operatorname{card} \mathbb{R} \leq \aleph_0$, o que contradiz a Proposição 3.22. Absurdo! Logo, concluímos que $\operatorname{card} \mathbb{I} > \aleph_0$.

□

Lembramos que o conjunto das partes de um conjunto A é o conjunto de todos os subconjuntos de A, e é denotado por $\mathcal{P}(A)$. Assim,

$$\mathcal{P}(A) = \{X \,:\, X \subseteq A\}.$$

Com isso, enunciamos o seguinte resultado importante.

Proposição 3.26 *Se A é um conjunto enumerável, então, o conjunto $\mathcal{P}(A)$ das partes de A é não enumerável.*

Demonstração. Seja A enumerável. Então, temos que $A \sim \mathbb{N}$. Assim, para provar a Proposição, é suficiente mostrar que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é não enumerável.

Por absurdo, suponha que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ seja enumerável. Logo, podemos escrever seus elementos numa lista. Assim, seja

$$\{N_1, N_2, N_3, ...\}$$

uma enumeração de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Seja $B = \{j \in \mathbb{N} : j \notin N_j\}$ um subconjunto de $\mathbb{N}$.

Logo, $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, e disso segue que $B = N_i$, para algum $i \in \mathbb{N}$.
Como $N_i = B$, pela definição de B temos que $i \in N_i \Leftrightarrow i \notin N_i$, que é um absurdo!

Portanto, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é não enumerável.

$\square$

Da própria prova da proposição acima, temos o corolário abaixo.

Corolário 3.27 *O conjunto das partes de* $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, *é não enumerável.*

Capítulo 4

Sequências numéricas

Neste capítulo vamos definir um tipo especial de função, chamado *sequência*, bem como suas principais propriedades de convergência. Comecemos com a definição de sequência.

4.1 Primeiros conceitos

Definição 4.1 Uma sequência numérica $(x_n)_n$ é definida como uma lista infinita de números reais

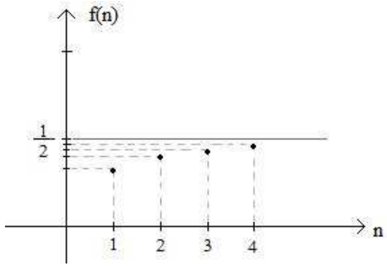
$$(x_n)_n = (x_1, x_2, x_3, ...),$$

onde os $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Outra maneira equivalente de definir uma sequência é considerá-la como uma função de variável natural $x_n = x(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ à qual, para cada $n \in \mathbb{N}$ associa uma imagem x_n, e o conjunto imagem, ordenadamente, $x_1, x_2, ...$, define a sequência (x_n).

Os números x_n da imagem de uma sequência são chamadas de termos ou elementos da sequência. Podemos denotar os termos da sequência tanto por $x(n)$ como x_n, sendo que esta última é a mais usada.

Como o domínio de uma sequência é sempre o conjunto dos naturais, simplesmente consideramos a expressão que a define.

Exemplo. Se $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$, então $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$, $x_3 = \dfrac{3}{7}$, $x_4 = \dfrac{4}{9}$ e assim por diante. A figura abaixo ilustra o comportamento gráfico desta sequência.



A sequência $(x_n)_n$ dada acima pode ser representada pela lista ordenada infinita de seus termos:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, ...) = (\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9}, ..., \frac{n}{2n+1}, ...).$$

Definição 4.2 Dizemos que duas sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são iguais se, e somente se, $x_i = y_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

A definição acima pode parecer um tanto ingênua, no entanto atente-se de que duas sequências serão iguais somente quando os termos de mesma posição de ambas forem iguais, ou seja, (x_n) será igual a (y_n) somente quando $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, e assim por diante. Um contra-exemplo interessante de se ver, por exemplo, é considerar a sequência (x_n) definida por

$$x_n = \frac{1}{n}$$

e a sequência $(y_n)_n$ definida por

$$y_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{2}{n+2}, \text{ se } n \text{ for par} \end{cases}$$

Embora ambas possuam mesmos elementos, elas não são iguais, pois ao listarmos ordenadamente os termos de (x_n) e os termos de (y_n) vamos obter

$$(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$$

e

$$(y_n) = (1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{4}, ...)$$

Definição 4.3 Seja (x_n) uma sequência. Tomando-se um subconjunto infinito de índices $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ de $\mathbb{N}$, definimos a partir da sequência dada, uma *subsequência*. Notamos uma subsequência da sequência (x_n) por (x_{n_k}).

Observe que, num certo sentido, uma subsequência de uma sequência, embora seja uma sequência, pois continua sendo uma lista infinita ordenada, a mesma não está sendo ordenada por índices $1, 2, 3, ...$, mas por um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ de elementos $n_1, n_2, ..., n_k, ...$. Por essa razão, definir uma sequência como uma lista infinita é mais preciso do que definir como sendo uma função com domínio no conjunto dos naturais, muito embora exista uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e o conjunto $\{n_1, n_2, ..., n_k, ...\}$, definida por $\varphi : k \in \mathbb{N} \mapsto x_{n_k}$.

Exemplo. Dada a sequência $x_n = (-1)^n$ temos $x_1 = x_3 = x_5 = ... = x_{2n-1} = ... = -1$ e $x_2 = x_4 = x_6 = ... = x_{2n} = ... = 1$, ou seja, destacamos da sequência original duas subsequências: a subsequência (x_{2n-1}) dos termos ímpares e a subsequência (x_{2n}) dos termos pares.

4.2 Limite de sequência

Como sequências são funções, podemos indagar sobre os seus limites. Porém, como a sequência (a_n) está definida para valores inteiros de n, o único limite que faz sentido é o de a_n quando $n \to +\infty$.

Por exemplo, note que os elementos da sequência $(x_n)_n$ definida por

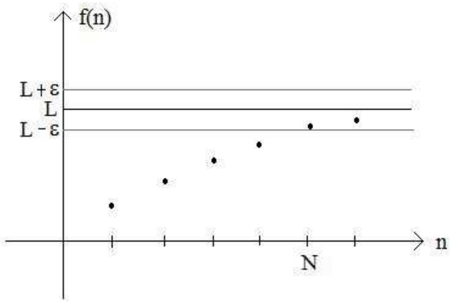
$$x_n = \frac{n}{2n+1}$$

estão cada vez mais próximos de $\frac{1}{2}$, embora nenhum elemento da sequência assuma o valor $\frac{1}{2}$. Intuitivamente vemos que podemos obter um elemento da sequência tão próximo de $\frac{1}{2}$ quanto desejarmos, bastando tomar o número de elementos suficientemente grande. Expressando de outra forma, temos que $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right|$ pode se tornar menor que qualquer número positivo ε, contanto que n seja suficientemente grande. Por isso, dizemos que o limite da sequência

$\frac{n}{2n+1}$ é $\frac{1}{2}$.

Definição 4.4 A sequência (x_n) tem um limite L se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir um número $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se n for um inteiro de tal modo que $n \geq n_0$, então $|x_n - L| < \varepsilon$ e escrevemos

$$\lim_{n+\infty} x_n = L$$



Em símbolos:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Em algumas ocasiões vamos utilizar a notação $x_n \to L$, que significa $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$.

Vejamos um exemplo de aplicação.

Exemplo. Prove que a sequência $x_n = \frac{n}{2n+1}$ tem limite $\frac{1}{2}$.

Solução. Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implique em

$$|x_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon.$$

Vamos estimar $|x_n - \frac{1}{2}|$.

$$|x_n - \frac{1}{2}| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Como queremos achar um $n \geq n_0$, então, supondo determinado, podemos escrever

$$2n + 1 \geq 2n_0 + 1 > 2n_0,$$

e daí

$$2(2n + 1) > 2(2n_0) = 4n_0,$$

e portanto

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{4n_0}.$$

Assim, como queremos que $|x_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$, se impormos que $\frac{1}{4n_0} < \varepsilon$, vamos obter $n_0 > \frac{1}{4\varepsilon}$.

Ou seja, acabamos de mostrar que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ (e é tal que $n_0 > \frac{1}{4\varepsilon}$), tal que, $\forall n \geq n_0$, implique em $|x_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$, ou seja, acabamos de provar que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Neste caso, na prática, podemos tomar $n_0 = \lfloor \frac{1}{4\varepsilon} \rfloor + 1$, onde $\lfloor a \rfloor$ denotará a parte inteira do número real a.

Apenas para ilustrar a prova acima, se tomarmos $\varepsilon = 0,1$, então teremos que $n_0 > \frac{1}{4 \cdot 0,1} = 2,5$, ou seja, neste caso, tomaremos $n_0 = \lfloor 2,5 \rfloor + 1 = 3$. Assim, segue que, a partir do índice $n = 3$, a distância do termo x_n da sequência $x_n = \frac{n}{2n+1}$ ao valor $\frac{1}{2}$ fica menor do que $0,1$.

Por exemplo, se tomarmos $n = 4$ vamos notar que

$$|x_4 - \frac{1}{2}| = \left|\frac{4}{9} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{18} \approx 0,056 < 0,1 = \varepsilon.$$

Definição 4.5 Se a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiver um limite, dizemos que ela é *convergente*, e x_n converge para o limite. Se a sequência não for convergente, ela é dita *divergente*.

Por exemplo, a sequência (x_n) definida por $x_n = (-1)^n$ é divergente (Justifique!)

Exemplo. Determine se a sequência (x_n) definida por $x_n = n \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}$ é convergente.

Solução. Como $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}$ e $\dfrac{1}{n}$ tendem a zero quando n tende a infinito, lembrando do primeiro limite notável, temos

$$\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi.$$

Logo, $\lim_{n\to+\infty} x_n = \pi$, se n for inteiro positivo. Dessa forma, a sequência dada é convergente e converge para π.

4.3 Sequências limitadas

Definição 4.6 O número L é chamado de *cota inferior* da sequência (x_n) se $L \leq x_n$ para todo n inteiro positivo, e o número S é chamado de *cota superior* da sequência (x_n) se $x_n \leq S$ para todo n inteiro positivo.

No caso quando uma sequência (x_n) possuir uma cota inferior, dizemos que a mesma é *limitada inferiormente*, e no caso de possuir uma cota superior, dizemos que a mesma é *limitada superiormente*.

Esses conceitos de limitação superior e inferior de uma sequência podem ser facilmente estendidos para conjuntos ordenados.

Definição 4.7 Dizemos que uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, ela tiver cotas superior e inferior, ou seja, quando for limitada superiormente e inferiormente.

Ou seja, (x_n) é dita limitada se, e somente se, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ou, de uma maneira mais simples, dizemos que (x_n) é limitada se existir $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Abaixo recordamos dos conceitos de ínfimo e supremo estudados no Capítulo 2, visto que serão importantes a seguir.

Definição 4.8 Seja X um conjunto limitado (superiormente e inferiormente, ou seja, X possui cotas inferior e superior, no mesmo sentido mencionado anteriormente). Definimos como o *supremo* do conjunto X, e denotamos por $\sup X$, como a menor das cotas superiores para X e o *ínfimo* do conjunto X, e denotamos por $\inf X$, como sendo a maior das cotas inferiores para X. Mais precisamente, temos que, denotando por $M = \sup X$ e $m = \inf X$,

- M é supremo de X se, e somente se
  (a) $x \leq M$, $\forall x \in X$, i.e., M é uma cota superior para X;
  (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tal que $M - \varepsilon < x \leq M$; i.e., M é a menor cota superior de X.
- m é ínfimo de X se, e somente se
  (a) $x \geq m$, $\forall x \in X$, i.e., m é uma cota inferior para X;
  (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tal que $m \leq x < m + \varepsilon$; i.e., M é a maior cota inferior de X.

Exemplo 1. Para a sequência $x_n = \dfrac{1}{n}$ cujos elementos são $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ..., \dfrac{1}{n}, ...$, podemos considerar 1 uma cota superior, assim como 30 também é uma cota superior. 0 é uma cota inferior.

Como o conjunto $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos termos dessa sequência assume valor máximo 1, temos que o supremo de X é 1, ou seja, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 1$. Vamos mostrar que o ínfimo de X é 0. De fato, basta notar que[1]

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{n} > 0$. Logo, 0 é uma cota inferior para $X = \{x_n = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq x_{n_0} < 0 + x_n$. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, tome $n_0 = n + 1$, e então

$$x_{n_0} = \frac{1}{n_0} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = x_n,$$

o que prova (b)

[1] Note que os itens (a) e (b) foram adaptados para sequências.

Portanto, $0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Proposição 4.9 *Se (x_n) for uma sequência convergente, então (x_n) é limitada.*

Demonstração. Seja $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Tome $\varepsilon = 1$. Então, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implica em $|x_n - a| < 1$, ou seja,

$$-1 < x_n - a < 1,$$

isto é,

$$a - 1 < x_n < a + 1, \, \forall n \geq n_0.$$

Defina o conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0 - 1}, a - 1, a + 1\}$. Como este conjunto é finito segue que existem

$$M = \max X \quad \text{e} \quad m = \min X,$$

e, portanto, concluímos que

$$m \leq x_n \leq M, \, \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, (x_n) é limitada.

$\square$

Observamos, porém, que o fato de uma sequência ser limitada não implica que ela seja convergente. Por exemplo, a sequência dada por $a_n = (-1)^n$ é limitada, visto que seus termos são sempre -1 e 1, os ímpares e os pares, respectivamente. Portanto, $\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$. A convergência não ocorreu neste caso pois os seus termos oscilam nos seus valores. A garantia da convergência de uma sequência limitada é adicionar a hipótese da sequência, além de limitada, ser também monótona. Isto é provado no Teorema 4.13.

4.4 Propriedades dos limites

As propriedades de limites de sequências são análogas às propriedades de limites de funções, estudadas num curso de Cálculo.

Proposição 4.10 *O limite de uma sequência, se existir, é único.*

Demonstração. Por absurdo, seja (x_n) sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, com $a \neq b$.
Assim, tome $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} > 0$.
Disso, de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainda, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Tomando $\widetilde{n} = \max\{n_0, n_1\}$, segue que valem $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|x_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Disso, $\forall n \geq \tilde{n}$, temos

$$|b-a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{2}. \quad \text{(Absurdo!)}$$

Portanto, $a = b$.

$\square$

Proposição 4.11 *(Propriedades aritméticas dos limites de sequências) Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências tais que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, então*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, *desde que $b \neq 0$.*

Demonstração. Faremos as provas de (i), (iii) e (iv), visto que a prova de (ii) é análoga à de (i).

(i) Dado $\varepsilon > 0$.
Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Como $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Tomando $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\} > 0$ temos que, $\forall n \geq \tilde{n}$ valem as duas desigualdades acima e daí

$$|(x_n - y_n) - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, para $\varepsilon > 0$ determinamos $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq \tilde{n} \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon,$$

isto é, vale (i).

(iii) Primeiramente, como existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, segue que (x_n) é limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, segue que existem n_0 e n_1 naturais tais que

- para todo $n \geq n_0$, implica em $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}$,
- para todo $n \geq n_1$, implica em $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$,

Assim, tome $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\}$. Disso, segue que $\forall n \geq \tilde{n}$, valem ambas as desigualdades acima. Dessa forma, avaliando $|x_n y_n - ab|$, vamos obter

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| =$$

$$= |(x_n y_n - x_n b) + (x_n b - ab)| \leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| \leq$$

$$< M \cdot |y_n - b| + (|b| + 1) \cdot |x_n - a| <$$

$$< M \frac{\varepsilon}{2M} + (|b| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} = \varepsilon,$$

para todo $n \geq \tilde{n}$, o que prova (iii)

(iv) Dado $\varepsilon > 0$. Sem perda de generalidade, vamos considerar o caso quando $b > 0$.

Como $y_n \to b$, temos que $\exists \tilde{n} \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq \tilde{n}$, implique em $y_n > \frac{b}{2}$, e daí

$$\frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon \cdot b}{4}$.

Do mesmo modo, como $y_n \to b$, segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |y_n - b| < \dfrac{\varepsilon \cdot b^2}{4(|a|+1)}$.

Assim, para todo $n \geq \overline{n} := \max\{\tilde{n}, n_0, n_1\}$, temos

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n \cdot b - a \cdot y_n}{y_n \cdot b}\right| < \frac{2|x_n \cdot b - a \cdot y_n|}{b \cdot b} = 2\frac{|x_n \cdot b - a \cdot b + a \cdot b - a \cdot y_n|}{b^2}$$

$$\leq \frac{2(|b| \cdot |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b|)}{b^2} < \frac{2(|b| \cdot |x_n - a| + (|a|+1) \cdot |y_n - b|)}{b^2} =$$

$$= 2\frac{|x_n - 1|}{b} + 2\frac{(|a|+1)}{b^2}|y_n - b| < \frac{2}{b}\frac{\varepsilon b}{4} + 2\frac{(|a|+1)}{b^2}\frac{\varepsilon b^2}{4(|a|+1)} = \varepsilon$$

□

4.5 Sequências monótonas

Definição 4.12 Dizemos que uma sequência (a_n) é

(i) *crescente*, se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) *decrescente*, se $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Chamamos de *monótona* uma sequência que seja crescente ou decrescente.
Se $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a sequência é chamada de *estritamente crescente* e se $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a sequência é chamada de *estritamente decrescente*.

Exemplo. Determine se a sequência (x_n) dada por $x_n = \frac{n}{2n+1}$ é crescente, decrescente ou não monótona.

Solução. Sabemos que os quatro primeiros elementos desta sequência são $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$ o que nos leva a considerar que a sequência pode ser crescente.

Assim, temos:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{2n^2 + 2n + n + 1 - 2n^2 - 3n}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0,$$

ou seja, obtemos

$$x_{n+1} > x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

mostrando que a sequência (x_n) é estritamente crescente.

Aproveitando este exemplo, examinemos o supremo e o ínfimo de (x_n), caso existam. Temos que (x_n) é crescente e que $x_n = \frac{n}{2n+1} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, temos que 0 é uma cota inferior para (x_n). Além disso, como (x_n) é crescente, segue que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = \min_{n\in\mathbb{N}} x_n = x_1 = \frac{1}{3}.$$

Afirmamos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \dfrac{1}{2}$. De fato, defina $X = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Temos que

(a) $x_n = \dfrac{n}{2n+1} \leq \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Logo, $\frac{1}{2}$ é uma cota superior para o conjunto X dos termos da sequência.

(b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_n \in X$ tal que $\frac{1}{2} - \varepsilon < x_n$ (ou seja, $\frac{1}{2}$ é a menor das cotas superiores para o conjunto X dos termos da sequência):
De fato, por absurdo, se

$$\frac{1}{2} - \varepsilon \geq x_n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

então

$$\frac{1}{2} - \varepsilon \geq \frac{n}{2n+1},$$

onde obtemos

$$n \leq \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, concluiríamos que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais seria limitado superiormente em $\mathbb{R}$, um absurdo!
Logo, vale (b).

Portanto, por (a) e (b) segue que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \dfrac{1}{2}$.

O próximo resultado facilitará enormemente esta avaliação.

Teorema 4.13 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência monótona e limitada. Sem perda de generalidade, suponhamos que tal sequência seja crescente, i.e., $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como (x_n) é limitada, em particular, é limitada superiormente. Seja $A \in \mathbb{R}$ uma cota superior para (x_n), i.e., $x_n \leq A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Defina o conjunto de todos os termos da sequência por $X = \{x_n \ : n \in \mathbb{N}\}$. Obviamente $X \neq \emptyset$ pois, por exemplo, $x_1 \in X$.

Então, X é limitado superiormente por A. Logo, existe uma menor cota superior, à qual denotaremos por L, ou seja, existe $L = \sup X$.

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. De fato, tome $\varepsilon > 0$. Como L é cota superior para X segue que $x_n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Além disso, como $L - \varepsilon < L = \sup X$, segue que $L - \varepsilon$ não é cota superior para X. Portanto, segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < x_{n_0}$.

E, como (x_n) é crescente, temos que

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < L,$$

ou seja,

$$L - \varepsilon < x_n < L < L + \varepsilon,$$

i.e.,

$$|x_n - L| < \varepsilon,$$

provando que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

□

Obs.: A demonstração do Teorema acima nos fornece um outro resultado importante: se (x_n) for uma sequência crescente e limitada superiormente, então existe o limite de x_n, e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n,$$

e se (x_n) for decrescente e limitada inferiormente, então

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Exemplo 1. Voltando ao exemplo anterior ao Teorema acima, como $x_n = \frac{n}{2n+1}$ é estritamente crescente e limitada superiormente por 1, por exemplo, segue que tal sequência é convergente, e pela prova do Teorema acima, temos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 2. Considere a sequência (b_n) dada por

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Afirmamos que esta sequência é convergente. De fato, precisamos mostrar que:

(i) (b_n) *é monótona (de fato, estritamente crescente).* Realmente, basta notar que

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n,$$

e, portanto, monótona.

(ii) (b_n) *é limitada superiormente por 3, i.e.,* $b_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
De fato,

$$b_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!} < 1+1+\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right],$$

e como entre colchetes temos a soma de $n-1$ termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, pela fórmula da soma dos $k-1$ primeiros termos de uma P.G. de razão q é dada por

$$S_{k-1} = \frac{a_1(q^{k-1}-1)}{q-1} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^{k-1}}{1-q},$$

teremos

$$b_n = 1 + 1 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right] = 2 + \left[\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

(iii) (b_n) *é limitada inferiormente por* 2. De fato, basta notar que

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} > 1 + 1 = 2.$$

Portanto, concluímos que $2 < b_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e que (b_n) é monótona. Portanto, pelo Teorema 4.13 segue que existe o limite da sequência (b_n), e denotaremos por

$$e = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Exemplo 3. Seja (a_n) a sequência definida por

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Afirmação 1. (a_n) *é estritamente crescente.*

Vamos mostrar que $a_{n+1} > a_n$, o que equivale mostrar que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Note que

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n^n}.$$

Assim,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{(n+2)^n(n+2)n^n}{(n+1)^{2n}(n+1)} =$$

$$= \frac{[(n+2)n]^n\,(n+2)}{[(n+1)^2]^n\,(n+1)} = \frac{(n^2+2n)^n}{(n^2+2n+1)^n} \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Aplicando a desigualdade de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \geq -1$ (no caso, tomando $x = -\frac{1}{n^2+2n+1} \geq -1$), vamos obter

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

Afirmação 2. $a_n < b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $\forall n \geq 2$.

De fato, abrindo a soma com o desenvolvimento binomial para a_n, obtemos

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1)^{n-j} \left(\frac{1}{n}\right)^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} =$$

$$= \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n!}{n!(0!)}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + ... + \frac{1}{n!}\frac{n!}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + ... + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n-1)!}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ...$$

$$... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Como cada multiplicador de cada fator $\frac{1}{k!}$ é menor do que 1, obtemos a estimativa

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ...$$

$$... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} = b_n < 3.$$

Logo, temos que

$$a_n < b_n < 3, \forall n,$$

e como (a_n) é crescente e limitada superiormente por 3, segue pelo Teorema 4.13 que

$$\exists\, L = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Ainda, como $a_n < b_n$, $\forall n$, pela passagem ao limite, teremos

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n \leq \sup b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e,$$

ou seja,

$$L \leq e. \tag{4.1}$$

Mostremos que também vale a desigualdade contrária. Para k fixado, $\forall n \geq k$, temos, desprezando após o k-ésimo aditivo da expansão binomial para a_n:

$$a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ...$$

$$... + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Com k fixado, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$L \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{k!} = b_k,$$

ou seja,

$$L \geq b_k, \forall k \in \mathbb{N} \text{ fixado},$$

então pela passagem ao limite, vem

$$L \geq \lim_{k\to\infty} b_k = e,$$

ou seja,

$$L \geq e. \tag{4.2}$$

Assim, por (4.1) e (4.2) segue que $L = e$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

onde a constante $2 < e < 3$ é chamada de *número de Euler*.

Vejamos outro exemplo de aplicação do Teorema 4.13.

Exemplo 4. Qual o valor de $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$, se existir?

Solução. Defina a sequência (x_n) recursivamente por

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \end{cases}$$

Assim, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$, se o limite existir.

Afirmação 1. *A sequência (x_n) é crescente, i.e., $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

A prova dessa afirmação é feita por indução sobre o índice n.

(i) Quando $n = 1$ temos $x_1 = \sqrt{2}$ e

$$x_2 = \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1.$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que vale a desigualdade

$$x_k \leq x_{k+1}, \tag{4.3}$$

para um certo índice k. Precisamos mostrar que vale para o índice $k+1$, ou seja, que $x_{k+1} \leq x_{k+2}$. De fato, somando 2 em (4.3), vem

$$2 + x_k \leq 2 + x_{k+1},$$

o que, extraíndo a raiz quadrada, obtemos

$$x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} \leq \sqrt{2+x_{k+1}} = x_{k+2}.$$

Logo, por (i) e (ii) segue que (x_n) é crescente.

Afirmação 2. *A sequência (x_n) é limitada superiormente.*

De fato, mostraremos que $x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Faremos a prova por indução sobre o índice n.

(i) Quando $n = 1$, temos
$$x_1 = \sqrt{2} \leq 2.$$
Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que $x_k \leq 2$ para um certo índice k. Precisamos mostrar que $x_{k+1} \leq 2$. De fato,
$$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$$

Logo, por (i) e (ii) segue a Afirmação 2.

Assim, pelo Teorema 4.13, como a sequência (x_n) é crescente [Afirmação 1] e limitada superiormente [Afirmação 2], segue que existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Logo, pela definição recursiva da sequência (x_n),
$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n},$$
passando o limite, obtemos
$$L = \sqrt{2 + L},$$
ou seja, obtemos a equação
$$L^2 - L - 2 = 0,$$
que fornece $L = 2$ e $L = -1$, e como $x_n > 0$, para todo n, segue que vale $L = 2$, ou seja, obtemos
$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} = 2.$$

4.6 Dinâmica das convergências

Considere a sequência (x_n) definida recursivamente por
$$x_1 = \sqrt{2} \ \text{ e } \ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n},$$

à qual mostramos acima convergir para 2.

Escreva $f(x_n) = x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, onde $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \sqrt{2 + x}.$$

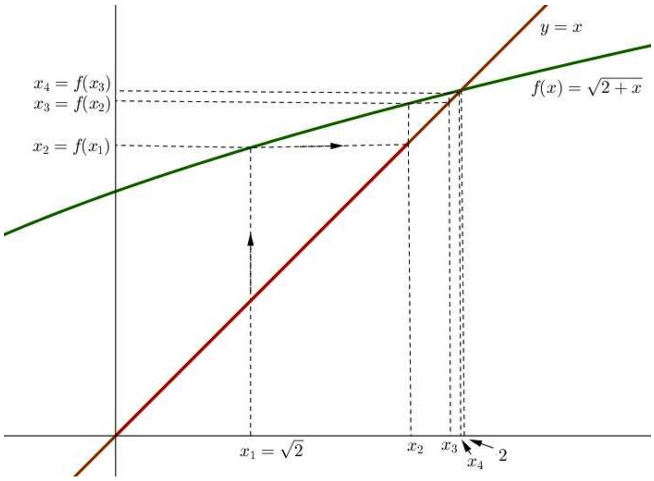
Assim, temos

- $x_1 = \sqrt{2}$,
- $x_2 = f(x_1) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$,
- $x_3 = f(x_2) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$,
- etc.

Como vimos na seção anterior, a sequência (x_n) é crescente e limitada. A função f acima definida também é crescente. Para ver isso basta verificar que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 + x}} > 0, \ \forall x \in (0, +\infty).$$

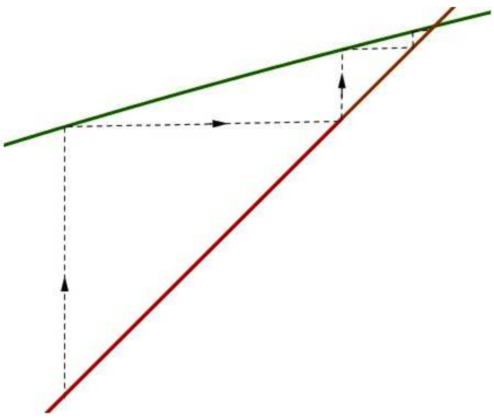
Montando os gráficos de f e da reta bissetriz dos quadrantes ímpares $y = x$ num mesmo plano cartesiano, podemos visualizar a "dinâmica" da convergência:



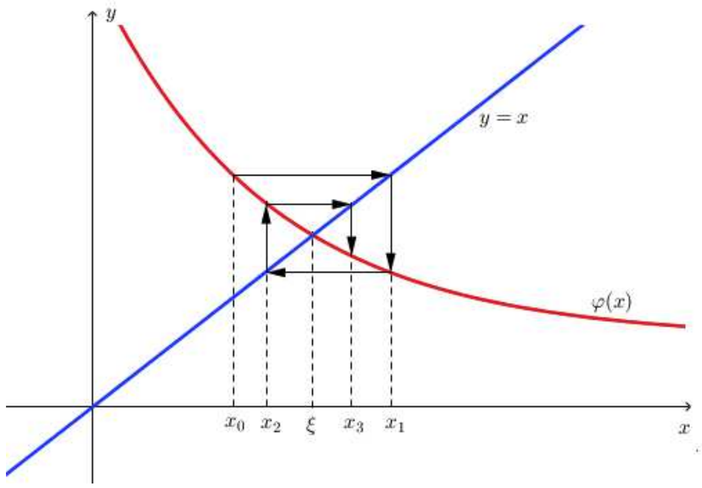
Observe que a reta $y = x$ serve apenas para projetar a imagem $f(x_n) = x_{n+1}$ no eixo horizontal, e a partir daí determinar

$$f(x_{n+2}) = \sqrt{2 + x_{n+1}}, \quad \text{etc.}$$

Note que, sendo f crescente a dinâmica vai produzindo uma "escada" que se aproxima do limite de x_n quando $n \to \infty$ (a intersecção $y = f(x)$ e $y = x$).



Se a f que determina os termos da sequência for decrescente a dinâmica nos fornecerá duas subsequências, uma crescente e outra decrescente, ambas convergindo para o limite de x_n (ou seja, a sequência (x_n) não será monótona):



Vejamos um exemplo para ilustrar este caso.
Vamos construir uma sequência $(x_n)_n$ que converge para $\sqrt{2}$, do seguinte modo: vamos representar $\sqrt{2}$ como uma fração contínua, c.f. visto no Capítulo 2:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}},$$

e assim

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}}.$$

Isso nos motiva perguntar: Será que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}\ ?$$

Tal representação nos permite definir a sequência (x_n) onde

$$x_1 = 1;\ x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};\ x_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5};\ \text{etc.}$$

Recursivamente, definimos a sequência (x_n) pondo

$$x_1 = 1 \ \text{ e } \ x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_n}.$$

Vamos mostrar que $x_n \to \sqrt{2}$. Defina $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

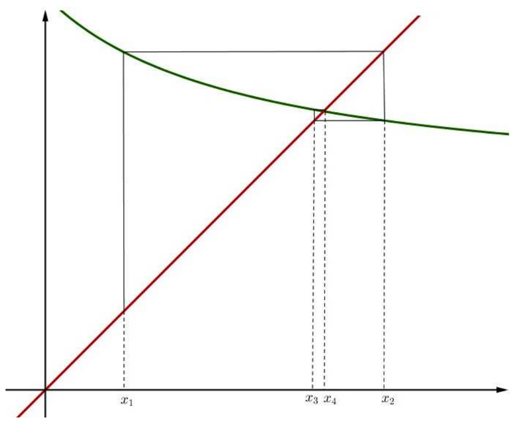
$$f(x) = 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x+2}{x+1}.$$

Como

$$f'(x) = \frac{(x+1)\cdot 1 - (x+2)\cdot 1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0,\ \forall x \in (0, +\infty),$$

segue que f é decrescente em $(0, +\infty)$.

Logo, a sequência (x_n) não é monótona. Veja a ilustração da dinâmica da convergência:



Pela ilustração acima, conjecturamos que

$$x_1 < x_3 < x_5 < ... < x_6 < x_4 < x_2.$$

Vamos considerar duas subsequências da sequência (x_n): a subsequência (x_{2n-1}) dos termos ímpares dada por

$$x_{2n+1} = f(x_{2n}) = f(f(x_{2n-1})) = (f \circ f)(x_{2n-1});$$

e a subsequência (x_{2n}) dos termos pares, dada por

$$x_{2n} = f(x_{2n-1}) = f(f(x_{2n-2})) = (f \circ f)(x_{2n-2}).$$

Defina $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{3x+4}{2x+3}.$$

Assim, temos que

$$g'(x) = \frac{(2x+3) \cdot 3 - (3x+4) \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{1}{(2x+3)^2}, \ \forall x \in (0, +\infty).$$

Logo, g é crescente.

Afirmação 1. *A subsequência (x_{2n-1}) dos termos ímpares é crescente.*

Ou seja, vamos mostrar que $x_{2n-1} < x_{2n+1}$, $\forall \in \mathbb{N}$. Tal prova será feita por indução sobre n.

(i) Para $n = 1$, temos

$$x_1 = 1 < \frac{7}{5} = x_3.$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que $x_{2k-1} < x_{2x+1}$ para um certo índice k. Precisamos mostrar que $x_{2k+1} < x_{2k+3}$. De fato, como g é crescente,

$$x_{2k-1} < x_{2k+1} \Rightarrow g(x_{2k-1}) < g(x_{2k+1}) \Rightarrow x_{2k+1} < x_{2k+3}.$$

Logo, por (i) e (ii) segue a prova da Afirmação 1.

Afirmação 2. *A subsequência (x_{2n}) dos termos pares é decrescente.*

Ou seja, vamos mostrar que $x_{2n} > x_{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Faremos a prova por indução.

(i) Para $n = 1$ temos

$$x_2 = \frac{3}{2} = \frac{18}{12} > \frac{17}{12} = x_4.$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que $x_{2k} > x_{2k+2}$ para um certo índice k. Precisamos mostrar que vale para o índice $k + 1$, ou seja, precisamos mostrar que $x_{2k+2} > x_{k+4}$. De fato, como g é crescente,

$$x_{2k} > x_{2k+2} \Rightarrow g(x_{2k}) > g(x_{2k+2}) \Rightarrow x_{2k+2} > x_{2k+4}.$$

Logo, por (i) e (ii) segue a prova da Afirmação 2.

Precisamos mostrar agora que as subsequências (x_{2n}) e (x_{2n-1}) são limitadas, no caso, como (x_{2n}) é decrescente, precisamos mostrar que ela é limitada inferiormente, e como (x_{2n-1}) é crescente, precisamos mostrar que é limitada superiormente.

Afirmação 3. *A subsequência (x_{2n}) é limitada inferiormente.*

De fato, como $x_n > 0$, $\forall n$, temos que 0 é uma cota inferior para (x_n), logo, em particular para (x_{2n}).

Afirmação 4. *A subsequência (x_{2n-1}) dos termos ímpares é limitada superiormente.*

De fato, vamos mostrar que $x_{2n-1} < x_2$. Faremos a prova por indução.

(i) Para $n = 1$, temos

$$x_1 = 1 < \frac{3}{2} = x_2.$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que a desigualdade seja verdadeira para um certo índice $n = k$, i.e., que

$$x_{2k-1} < x_2.$$

Precismos mostrar que $x_{2k+1} < x_2$. Como g é crescente e lembrando que (x_{2n}) é decrescente, obtemos

$$x_{2k-1} < x_2 \Rightarrow g(x_{2k-1}) < g(x_2) \Rightarrow x_{2k+1} < x_4 < x_2.$$

Logo, por (i) e (ii) segue a Afirmação 4.

Portanto, com base nas Afirmações 1 e 4 segue que existe $L_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{2n-1} \nearrow L_1,$$

i.e., a subsequência dos termos ímpares é crescente e convergente para L_1; e de acordo com as Afirmações 2 e 3 segue que existe $L_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{2n} \searrow L_2,$$

i.e., a subsequência dos termos pares é decrescente e convergente para L_2.

Mostraremos que $L_1 = L_2$. Como

$$x_{2n+1} = g(x_{2n-1}) = \frac{3x_{2n-1} + 4}{2x_{2n-1} + 2},$$

passando o limite, obtemos

$$L_1 = \frac{3L_1 + 4}{2L_1 + 3},$$

donde segue que $L_1 = \sqrt{2}$.

Do mesmo modo, como

$$x_{2n+2} = g(x_{2n}) = \frac{3x_{2n} + 4}{2x_{2n} + 2},$$

passando o limite, obtemos

$$L_2 = \frac{3L_2 + 4}{2L_2 + 3},$$

donde segue que $L_2 = \sqrt{2}$.

Conclusão: $L_1 = L_2 = \sqrt{2}$, ou seja, a sequência (x_n) converge para $\sqrt{2}$, pois as duas subsequências (x_{2n}) e (x_{2n-1}) convergem para $\sqrt{2}$.

4.7 Limites infinitos

Definição 4.14 Dizemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ se, e somente se, $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M$.

Ou seja, $x_n \to +\infty$ (i.e., $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$) significa que a sequência (x_n) não é limitada superiormente e, portanto, é divergente. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Considere $x_n = c^n$, com $c > 1$. Vamos mostrar que $x_n \to +\infty$. De fato, como $c > 1$, então existe $b > 0$ tal que $1 + b = c$, e disso, aplicando a desigualdade de Bernoulli, vem

$$x_n = c^n = (1+b)^n \geq 1 + nb > nb,$$

ou seja, mostramos que

$$x_n > nb,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, dado $M > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{M}{b} > 0$. Logo, $\forall n \geq n_0$, tem-se

$$x_n > nb > n_0 b = \frac{M}{b} \cdot b = M,$$

i.e., $x_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$.

Obs.: Na prática, simplesmente avaliamos:

$$x_n = c^n = (1+b)^n \geq 1 + nb > nb \to +\infty \ \text{ quando } \ n \to +\infty.$$

Exemplo 2. Seja $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

De fato, basta abrir a potência do numerador e o fatorial do denominador e avaliar como segue:

$$x_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdot ... \cdot \frac{n}{n} \geq n \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 ... \cdot 1 = n \to +\infty$$

Proposição 4.15 *Se* (x_n) *e* (y_n) *forem sequências tais que* $x_n \to +\infty$ *e* (y_n) *é limitada inferiormente, então,*

$$x_n + y_n \to +\infty.$$

Demonstração. Como por hipótese (y_n) é limitada inferiormente, segue que existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $A \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sem perda de generalidade, assuma que $A \leq 0$ (pois se $A > 0$, então teríamos $0 < A \leq y_n$ e então usaríamos 0 como cota inferior para (y_n) ao invés de A).

Como $x_n \to +\infty$, então, dado $M > 0$, considere o número $M - A > 0$. Assim, para este $M - A > 0$, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implique em $x_n > M - A$.

Então, $\forall n \geq n_0$, valem as desigualdades $x_n > M - A$ e $y_n \geq A$. Somando-as, obtemos

$$x_n + y_n > M - A + A = M, \ \forall n \geq n_0,$$

ou seja, mostramos que

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n + y_n) = +\infty,$$

como queríamos provar.

$\square$

Proposição 4.16 *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *sequências tais que* $x_n \to +\infty$ *e* $\exists c > 0$ *tal que* $y_n > c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *então*

$$x_n \cdot y_n \to +\infty.$$

Demonstração. Por hipótese temos que $\exists c > 0$ tal que $y_n > c$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $x_n \to +\infty$, dado $M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, implique em $x_n > \frac{M}{c}$.

Então, multiplicando ambas as desigualdades, obtemos

$$x_n \cdot y_n > \frac{M}{c} \cdot c = M, \forall n \geq n_0,$$

como queríamos mostrar.

□

Outras propriedades sobre limites infinitos são deixadas como exercício para o leitor.

4.8 O Teorema de Bolzano-Weierstrass

Nesta seção apresentaremos um importante Teorema do estudo de sequências, conhecido por Teorema de Bolzano-Weierstrass. Antes, porém, apresentaremos um Teorema preliminar.

Teorema 4.17 *(Teorema dos intervalos fechados encaixados) Seja* $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ *uma sequência de intervalos fechados tais que* $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Então,* $\exists c \in \mathbb{R}$ *tal que* $c \in I_n$, $\forall n$, *ou seja,* $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Demonstração. Seja $I_n = [a_n, b_n]$ uma sequência de intervalos fechados e encaixados, ou seja, $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n$.

Seja $X = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Observe que $X \neq \emptyset$ pois $a_1 \in X$.

Afirmamos que X é limitado superiormente por b_1. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$. Como $[a_n, b_n] \subset [a_1, b_1]$, segue que $a_n \leq b_n \leq b_1$.

Portanto, sendo X limitado superiormente, temos que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c = \sup X$.

Afirmamos também que $c \in [a_n, b_n], \forall n$. De fato, sendo $c = \sup X$, temos que c é cota superior do conjunto X e então

$$a_n \leq c, \forall n. \tag{4.4}$$

Afirmamos também que $\forall n$, b_n é uma cota superior de X. Realmente, seja $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\forall m \geq n$ temos $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$. Logo $a_m \leq b_m \leq b_n$, ou seja, $a_m \leq b_n$, $\forall m \geq n$.

Mas $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_m \leq b_n$, donde segue que $a_m \leq b_n$, $\forall m$.

Logo, b_n é uma cota superior de X e daí temos que $b_n \geq \sup X = c$, $\forall n$. Portanto,

$$c \leq b_n, \ \forall n. \tag{4.5}$$

Juntando (4.4) e (4.5) segue o resultado.

□

Por fim, apresentamos o importante teorema sobre sequências.

Teorema 4.18 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada possui subsequência convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada. Então $\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, a_1 cota inferior e a_2 cota superior de (x_n).

Seja $I_1 = [a_1, b_1]$. Temos que $x_n \in I_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dividimos I_1 em dois sub-intervalos pelo ponto médio. Escolhemos $I_2 = [a_2, b_2]$ uma das metades tal que $x_n \in I_2$, para uma infinidade de índices n. Após isto, dividimos I_2 em dois sub-intervalos ao meio. Tomamos $I_3 = [a_3, b_3]$ uma das metades tal que $x_n \in I_3$ para uma infinidade de índices n. Seguimos estas divisões recursivamente, sempre tomando-se aquele subintervalo que contém uma infinidade de índices n (se em alguma etapa de divisão em dois sub-intervalos ambos possuírem uma infinidade de termos de (x_n), então podemos tomar qualquer um deles para fazer a nova divisão), obtemos uma sequência de intervalos fechados encaixados $I_1, I_2, ...$ onde

$$... \subset I_k \subset I_{k-1} \subset ... \subset I_2 \subset I_1$$

tais que

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = I_{k+1} \subset I_k = [a_k, b_k].$$

Sendo ℓ_{I_j} o comprimento do j-ésimo subintervalo temos por construção que

$$\ell_{I_{k+1}} = \frac{1}{2}\ell_{I_k} \Leftrightarrow b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2}, \quad \text{com} \quad x_n \in I_k,$$

para uma quantidade infinita de índices n.

Pelo Teorema dos intervalos fechados encaixados temos que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_k$, $\forall k$.

Vamos mostrar que existe uma subsequência de (x_n) que tende para o número real c. Para isto, precisamos escolher índices

$$n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_j < n_{j+1} < ...,$$

com $x_{n_j} \to c$.

Note que

- $a_n \in I_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, escolhemos qualquer n_1. Seja $n_1 = 1$. Temos então que $a_{n_1} = a_1 \in I_1$.
- $a_n \in I_2$, para uma infinidade de índices n. Escolhemos $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \in I_2$.
- $a_n \in I_3$, para uma infinidade de índices n. Escolhemos $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} \in I_3$.

$$\vdots$$

Seguindo estes raciocínios, obtemos $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$ de tal forma que $x_{n_k} \in I_k, \forall k$. Temos então uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n).

Note ainda que $x_{n_k} \in I_k$ e $c \in I_k$, isto implica que

$$|c - x_{n_k}| \leq \ell_{I_k} = b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = ... = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \to 0$$

quando $k \to +\infty$.

Portanto, (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n) tal que $x_{n_k} \to c$.

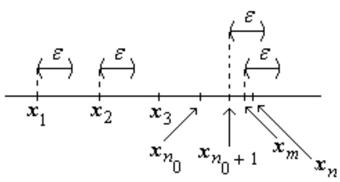
□

4.9 Sequência de Cauchy

Até o presente momento de nosso estudo de sequências vimos por exemplo, que para provar que uma sequência é convergente precisávamos, a priori, conhecer o candidato a limite. Porém, nem sempre isso é possível. Nesta seção vamos apresentar um outro critério mais interessante para mostrar se uma sequência é convergente sem precisar saber para quanto ela converge. Para isto vamos definir *sequência de Cauchy*.

Definição 4.19 Dizemos que uma sequência (x_n) é *de Cauchy* se, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer índices $m, n \geq n_0$ implique em $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

A ideia geométrica desta definição é bastante simples: uma sequência (x_n) chama-se de Cauchy se, dado um raio $\varepsilon > 0$, existir um índice n_0 tal que a distância entre dois termos quaisquer da sequência, a partir do índice n_0, estarão próximos um do outro a menos de ε.



Observe na ilustração que, fixado um raio $\varepsilon > 0$, temos que a distância entre x_1 e x_2 é maior do que este ε, as distâncias entre x_1 e x_3 e entre x_2 e x_3 também são maiores do que ε, e assim por diante. Porém, a partir de um índice

n_0 dois termos quaisquer da referida sequência equidistam entre si a menos de ε.

A proposição a seguir mostra um importante resultado.

Proposição 4.20 *Se uma sequência (x_n) for convergente, então ela é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente e seja a o seu limite. Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Desta forma, tomando $m, n \geq n_0$ temos

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ e } \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avaliando a distância entre x_m e x_n, temos

$$|x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, mostramos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$, ou seja, (x_n) é uma sequência de Cauchy.

□

Queremos provar que a recíproca da Proposição acima também é verdadeira. Porém, precisamos ver primeiramente o Lema abaixo:

Lema 4.21 *Se (x_n) é uma sequência de Cauchy, então ela é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy e tome $\varepsilon = 1$. Então, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$.

Em particular, fixando $n = n_0$ (o que é válido), segue que $\forall m \geq n_0$ temos

$$|x_m - x_{n_0}| < 1 \Leftrightarrow -1 \leq x_m - x_{n_0} < 1 \Leftrightarrow x_{n_0} - 1 < x_m < x_{n_0} + 1.$$

Portanto, $x_m \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1), \forall m \geq n_0$, ou seja, a partir do índice n_0 todos os termos da sequência (x_n) ficam no intervalo $(x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$.

Resta observar a quantidade finita de termos que ficaram fora deste intervalo, ou seja, os termos x_1, x_2, ..., x_{n_0-1} e os extremos do intervalo acima $x_{n_0} - 1$ e $x_{n_0} + 1$. Para isto, defina o conjunto

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}.$$

Como X é um conjunto finito podemos destacar o menor e o maior elemento. Assim, tomamos $a = \min X$ e $b = \max X$. Desta forma, conseguimos encontrar um intervalo $[a, b]$ tal que $x_n \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, a sequência (x_n) de Cauchy é limitada.

$\square$

Proposição 4.22 *Se (x_n) é uma sequência de Cauchy, então ela é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Pelo Lema anterior segue que (x_n) é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência x_{n_k} convergente, digamos, $x_{n_k} \to a$.

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

De fato, primeiramente, sendo (x_n) de Cauchy, temos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainda, como $x_{n_k} \to a$, temos que, para o mesmo $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n_k \geq n_1 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tome $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\}$. Então, $\forall n \geq \tilde{n}$, escolhendo um índice $n_k > \tilde{n}$, temos

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) - (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que prova que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

$\square$

Teorema 4.23 *Seja (x_n) uma sequência e seja $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 < \lambda < 1$, tal que*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}|, \forall n \geq 2.$$

Então, a sequência (x_n) é convergente.

Demonstração. Vamos mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente.

Para $m > n \in \mathbb{N}$, tome $p > 0$ tal que $m = n + p$. Assim,

$$|x_m - x_n| = |x_{n+p} - x_n| =$$

$$= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + x_{n+p-2} + ... + x_{n-1} - x_n| \leq$$

$$\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + ... + |x_{n-1} - x_n|,$$

ou seja, obtemos

$$|x_m - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + ... + |x_{n-1} - x_n|. \quad (4.6)$$

Pela hipótese do Teorema segue que quaisquer dois termos consecutivos x_k e x_{k-1} da sequência (x_n) podem ser estimados por

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \lambda |x_{k-1} - x_{k-2}| \leq \lambda^2 |x_{k-2} - x_{k-3}| \leq$$

$$\leq \lambda^3 |x_{k-3} - x_{k-4}| \leq \ ... \ \leq \lambda^{k-2} |x_2 - x_1|.$$

Assim, temos que (4.6) fica majorado por

$$|x_m - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + ... + |x_{n-1} - x_n| \leq$$

$$\leq \lambda^{n+p-2}|x_2 - x_1| + \lambda^{n+p-3}|x_2 - x_1| + \lambda^{n+p-4}|x_2 - x_1| + ... + \lambda^{n-1}|x_2 - x_1| =$$

$$= \left(\lambda^{n+p-2} + \lambda^{n+p-3} + \lambda^{n+p-4} + \lambda^{n-1}\right)|x_2 - x_1|.$$

O aditivo entre parênteses é uma soma de uma progressão geométrica de $n + p - 2 - (n - 1) = p - 1$ termos de razão λ^{-1}, e sabendo que a soma S_k de k termos de uma P.G. de razão q é dada por

$$S_k = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^k}{1-q},$$

segue que

$$\lambda^{n+p-2} + \lambda^{n+p-3} + \lambda^{n+p-4} + \lambda^{n-1} = \frac{\lambda^{n+p-2}}{1-\lambda^{-1}} - \frac{\lambda^{n+p-2}(\lambda^{-1})^{p-1}}{1-\lambda^{-1}} =$$

$$= \frac{\lambda^{n+p-1}}{\lambda - 1} - \frac{\lambda^n}{\lambda - 1},$$

e daí

$$|x_m - x_n| \leq \left(\lambda^{n+p-2} + \lambda^{n+p-3} + \lambda^{n+p-4} + \lambda^{n-1}\right)|x_2 - x_1| =$$

$$= \left(\frac{\lambda^{n+p-1}}{\lambda-1} - \frac{\lambda^n}{\lambda-1}\right)|x_2 - x_1| = \left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda} - \frac{\lambda^{n+p-1}}{1-\lambda}\right)|x_2 - x_1| \leq$$

$$\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_2 - x_1|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda^{n_0} < \frac{(1-\lambda)\varepsilon}{|x_2 - x_1|}.$$

Então, $\forall n \geq n_0$, sendo $0 < \lambda < 1$, obtemos

$$\lambda^n \leq \lambda^{n_0}.$$

Logo,

$$\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \leq \frac{\lambda^{n_0}}{1-\lambda},$$

e, portanto, $\forall m, n \geq n_0$, vale

$$|x_m - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_2 - x_1| \leq \frac{\lambda^{n_0}}{1-\lambda}|x_2 - x_1| < \frac{(1-\lambda)\varepsilon}{|x_2 - x_1|} \cdot \frac{|x_2 - x_1|}{1-\lambda} = \varepsilon,$$

ou seja, (x_n) é uma sequência de Cauchy, e então, pela Proposição 4.22 ela é convergente.

□

4.10 Ponto aderente. limsup e liminf

Como já sabemos, a sequência (x_n) dada por $x_n = (-1)^n$, embora seja limitada, ela não é convergente, pois não é monótona. No entanto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, como tal sequência é limitada, podemos extrair uma subsequência convergente. De fato, neste exemplo, é possível destacar duas subsequências convergentes, a subsequência dos termos pares (x_{2n}), dada por $x_{2n} = 1$, ou seja,

$$(x_{2n}) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, ...),$$

que converge para 1; e a subsequência dos termos ímpares (x_{2n-1}) dada por $x_{2n-1} = -1$, ou seja,

$$(x_{2n-1}) = (-1, -1, -1, -1, ...)$$

que converge para -1. Tais valores aos quais as subsequências convergem são chamados de *pontos aderentes*. Ou seja, temos a definição que segue.

Definição 4.24 Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que um ponto $c \in \mathbb{R}$ é um *ponto aderente* para a sequência (x_n) se existir uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to c$.

Na introdução dada acima temos que 1 e -1 são pontos aderentes da sequência $x_n = (-1)^n$.

Proposição 4.25 *Seja (x_n) uma sequência e $c \in \mathbb{R}$. Então, o ponto c é ponto aderente de (x_n) se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto*

$$\{n \in \mathbb{N} \, : \, x_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)\}$$

é infinito.

Demonstração. Suponha que $c \in \mathbb{R}$ seja ponto aderente de (x_n). Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \to c$.

Tome $\varepsilon > 0$. Então, pela definição de limite segue que existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n_k \geq n_0$, implica em $|x_{n_k} - c| < \varepsilon$, ou seja, implica em

$$c - \varepsilon < x_{n_k} < c + \varepsilon, \ \forall n_k \geq n_0,$$

e como tal desigualdade, pela definição de limite, vale para uma infinidade de índices n_k, desde que $n_k \geq n_0$, concluímos que o conjunto

$$\{n_k \, : \, x_{n_k} \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)\}$$

é infinito.

Reciprocamente, suponha que $\forall \varepsilon > 0$, $x_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ para uma infinidade de índices n. Vamos construir uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to c$. De fato, como a contenção acima vale para todo $\varepsilon > 0$, então:

- Para $\varepsilon = 1 > 0$, o conjunto de pontos de (x_n) tais que $x_n \in (c-1, c+1)$ é infinito. Então, escolha um índice n_1 tal que $x_{n_1} \in (c-1, c+1)$.

- Para $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, o conjunto de pontos de (x_n) tais que $x_n \in (c-\frac{1}{2}, c+\frac{1}{2})$ é infinito. Assim, escolha um índice $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in (c-\frac{1}{2}, c+\frac{1}{2})$.

- Para $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$, o conjunto de pontos de (x_n) tais que $x_n \in (c-\frac{1}{3}, c+\frac{1}{3})$ é infinito. Assim, escolha um índice $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \in (c-\frac{1}{3}, c+\frac{1}{3})$.

$$\vdots$$

- Segue a construção por indução: para $\varepsilon = \frac{1}{k} > 0$, suponha escolhido o índice $n_k > n_{k-1}$, tal que $x_{n_k} \in (x-\frac{1}{k}, c+\frac{1}{k})$ para uma infinidade de índices; para $\varepsilon = \frac{1}{k+1} > 0$, escolhe-se o índice $n_{k+1} > n_k$ tal que o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : (c-\frac{1}{k+1}, c+\frac{1}{k+1})\}$ é infinito.

Assim, por indução construímos uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n)tal que

$$|x_{n_k} - c| < \frac{1}{k},$$

o que, fazendo $k \to \infty$ concluímos que $x_{n_k} \to c$.

Portanto, c é um ponto aderente para a sequência (x_n).

$\square$

Proposição 4.26 *Se (x_n) for uma sequência limitada, então existe o maior e o menor valor de aderência.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada. Então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe pelo menos um ponto de aderência para a sequência (x_n). Defina por C o conjunto de todos os pontos de aderência de (x_n), ou seja,

$$C = \{c \in \mathbb{R} : c \text{ é valor de aderência para } (x_n)\}.$$

Pelo comentado acima, temos que $C \neq \emptyset$. Logo, está bem definido. Escreva

$$A = \inf C \quad \text{e} \quad B = \sup C.$$

Afirmamos que $B \in C$. De fato, como $B = \sup C$, então, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists c_k \in C$ tal que

$$B - \frac{1}{k} < c_k \leq B.$$

Então, pelo Teorema do Sanduíche para sequências, como $B - \frac{1}{k} \to B$ e $B \to B$ quando $k \to +\infty$, concluímos que $c_k \to B$. Logo, B também é um valor de aderência para (x_n), i.e., $B \in C$, e $B = \sup C$ é o maior elemento.

Analogamente se mostra que $A = \inf C \in C$ e, consequentemente, C também possui um menor elemento.

$\square$

Pela Proposição acima, sendo (x_n) uma sequência limitada, então sempre existem o maior e o menor valor de aderência. Isso nos motiva apresentar a definição que segue.

Definição 4.27 Seja (x_n) uma sequência limitada. Definimos, respectivamente, os limites *inferior* e *superior* de (x_n) por

- $\limsup x_n = \overline{\lim}\, x_n =$ o maior valor de aderência de (x_n),
- $\liminf x_n = \underline{\lim}\, x_n =$ o menor valor de aderência de (x_n).

Assim, por exemplo, sabemos que a sequência $x_n = (-1)^n$ possui apenas dois valores de aderência -1 e 1, visto que a subsequência dos termos ímpares converge para -1 e a subsequência dos termos pares converge para 1. Neste caso, tem-se que

$$\liminf x_n = -1 \quad \text{e} \quad \limsup x_n = 1.$$

Proposição 4.28 *Seja (x_n) uma sequência limitada. Então, (x_n) é convergente se, e somente se, existir um único ponto de aderência (ou seja, se $\liminf x_n = \limsup x_n$).*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada.

Suponha que (x_n) é convergente, i.e., $x_n \to L$.

Então, para qualquer subsequência (x_{n_k}) de (x_n), tem-se que $x_{n_k} \to L$, e portanto, o único ponto aderente de (x_n) é L.

Reciprocamente, suponha que exista um único ponto de aderência $c \in \mathbb{R}$ da sequência (x_n), ou seja, que existe uma subsequência de (x_n) que convirja para c.

Afirmamos que $x_n \to c$.

De fato, se por absurdo tivermos que $x_n \not\to c$, então[2]

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tal que, } \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 \text{ tal que } \quad |x_n - c| \geq \varepsilon_0,$$

ou seja, $x_n \notin (c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0)$.

Ou seja, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) fora do intervalo $(c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0)$.

Como (x_n) é limitada, por hipótese, então (x_{n_k}) também é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, segue que existe uma subsequência $(x_{n_{k_\ell}})$ de (x_{n_k}) tal que converge para um valor $d \in \mathbb{R}$, com $d \neq c$, pois $x_{n_{k_\ell}} \notin (c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0)$, ou seja,

$$x_{n_{k_\ell}} \to d, \text{ com } \quad d \neq c.$$

Assim, d é um outro ponto de aderência de (x_n) diferente do ponto c, mas por hipótese, temos que c era o único ponto de aderência para (x_n). Absurdo!

Logo, $x_n \to c$.

Isso conclui a prova da Proposição.

$\square$

[2] Isto é a negação da definição de limite de sequência.

Capítulo 5

Noções topológicas na reta

5.1 $\mathbb{R}$ como um Espaço métrico

Definição 5.1 Um *espaço métrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto não-vazio e d é uma métrica (ou *função distância*) em M, que é uma função $d : M \times M \to [0, +\infty)$ tal que, $\forall x, y, z \in M$, valem os axiomas

(i) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positividade)

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria)

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdade triangular)

No que segue, apresentamos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1. Tome $M = \mathbb{R}$ e a distância d entre dois pontos dada por $d(x, y) = |x - y|$. É fácil ver que d define uma métrica em $\mathbb{R}$. De fato d cumpre todas as propriedades apresentadas na definição acima: dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos

(i) $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$;

(iii) $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

Dizemos que essa métrica *induzida* pelo módulo é a *métrica usual* de $\mathbb{R}$.

De fato, será sobre este espaço métrico que desenvolveremos os conceitos topológicos de nosso curso. De todos os exemplos que apresentaremos, este é um dos mais simples e, ao mesmo tempo, o mais importante de todos.

Exemplo 2. Seja $M = \mathbb{R}^n$(espaço euclidiano). Dados $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ existem três maneiras naturais de definir a distância entre dois pontos, a saber:

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}$$

Afirmamos que as funções $d_1, d_2, d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ acima descritas são métricas. Das três, a mais difícil de provar é a d_2, chamada de métrica euclidiana, pois requer o estudo da *desigualdade de Schwarz* para provar a desigualdade triangular, e isso foge de um curso de Análise na Reta.

Exemplo 3. *Espaço métrico discreto:* Tomamos M qualquer conjunto não-vazio e definimos a aplicação $d : M \times M \to [0, +\infty)$ por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

É fácil ver que (M, d) é um espaço métrico (conhecido como espaço métrico discreto).

Exemplo 4. Espaço $\mathfrak{B}(A, \mathbb{R})$ de funções limitadas.

Seja A um conjunto arbitrário. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando $\exists\, k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k \,\forall x \in A$.

Indicamos por $\mathfrak{B}(A,\mathbb{R})$ o conjunto das funções $f : A \to \mathbb{R}$ limitadas, i.e.,

$$\mathfrak{B}(A,\mathbb{R}) = \{f : A \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ é limitada}\}.$$

Definimos em $\mathfrak{B}(A,\mathbb{R})$ a aplicação $d : \mathfrak{B}(A,\mathbb{R}) \times \mathfrak{B}(A,\mathbb{R}) \to [0,+\infty)$ por

$$d(f,g) = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|.$$

Afirmamos que esta aplicação é uma métrica e deixamos a verificação deste fato para o leitor.

Definição 5.2 Seja (M,d) um espaço métrico, $a \in M$, $\varepsilon > 0$. Definimos a *bola aberta* de centro em a e raio ε e a *bola fechada* de centro a e raio ε, respectivamente, como sendo os conjuntos

$$B(a,\varepsilon) = B_\varepsilon(a) = \{x \in M \,:\, d(x,a) < \varepsilon\},$$

e

$$B[a,\varepsilon] = \{x \in M \,:\, d(x,a) \leq \varepsilon\}.$$

Em particular, quando M for o corpo dos números reais, munido da métrica usual $d(x,y) = |x-y|$ em $\mathbb{R}$ (Exemplo 1) teremos

$$B(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, d(x,a) < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-a| < \varepsilon\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \,:\, -\varepsilon < x-a < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} =$$

$$= (a-\varepsilon, a+\varepsilon),$$

ou seja, a bola aberta centrada em a e raio ε corresponde com o intervalo aberto centrado em a e raio ε.

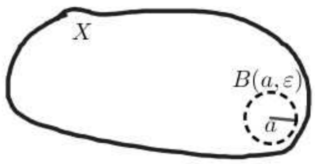
Analogamente, tem-se

$$B[a,\varepsilon] = [a-\varepsilon, a+\varepsilon].$$

5.2 Pontos interiores. Conjuntos abertos

Definição 5.3 Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que $a \in X$ é um *ponto interior* do conjunto X se, e somente se, existir $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset X$.

Ou seja, um ponto é interior em um conjunto X se, e somente se, for possível construir uma bola aberta centrada no referido ponto, que fique inteiramente contida em X. Abaixo temos uma ilustração.



A definição apresentada acima é geral, ou seja, vale para qualquer espaço métrico (M, d). Vamos "traduzir" o conceito acima para o nosso caso de interesse: dado $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X$, dizemos que a é um ponto interior de X se, e somente se, existir $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset X$, i.e., se, e somente se

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} \subset X,$$

ou seja, se, e somente se,

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X.$$

Em outras palavras: um ponto $a \in X$ é interior ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se for possível construir um intervalo centrado em a tal que o mesmo fique inteiramente contido em X.

O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto X chama-se *interior de* X e é denotado por $\operatorname{int}(X)$.

Doravante, vamos usar a notação de intervalo para bola aberta, pois estaremos tratando, especificamente no espaço métrico dos números reais.

Vejamos um exemplo importante.

Exemplo. Dados $\alpha < \beta$, considere o conjunto $X = [\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$.

Afirmamos que $\text{int}(X) = (\alpha, \beta)$.

De fato, note que, $\forall a \in (\alpha, \beta)$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (\alpha, \beta) \subset X$.

Mas $\alpha \notin \text{int}(X)$, pois $\forall \varepsilon_0 > 0$, tem-se $(\alpha - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0) \not\subset X = [\alpha, \beta)$, pois o intervalo $(\alpha - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$, por construção, contém pontos "à esquerda" de α.

É importante observar que o conceito de interior de um conjunto é relativo, ou seja, sempre devemos nos referenciar em relação a qual conjunto. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais possui, em $\mathbb{R}$, interior vazio, pois, fixado $q \in \mathbb{Q}$, independente do $\varepsilon > 0$ tomado, nenhuma bola centrada em $\mathbb{Q}$ com raio ε estará inteiramente contida em $\mathbb{Q}$, isso por força da densidade dos irracionais no conjunto dos reais (veja o Corolário 5.6). Porém, em relação ao próprio conjunto dos racionais tem-se $\text{int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, pois neste caso a noção de intervalo é sobre o corpo ordenado dos racionais, apenas.

Dado um conjunto X, toda vez que mencionarmos apenas no interior de X, i.e., toda vez que escrevermmos somente $\text{int}(X)$ sem nos referenciarmos em relação a qual conjunto, consideraremos que o conjunto de referência será o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Proposição 5.4 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então, valem as propriedades:*

(a) $\text{int}\,(X) \subset X$.

(b) *Se $X \subset Y$, então* $\text{int}(X) \subset \text{int}(Y)$.

Demonstração. (a) Se $a \in \text{int}(X)$, então $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$. Em particular, $a \in X$. Logo, vale (a).

(b) Se $a \in \text{int}(X)$, então $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset X$, e como por hipótese $X \subset Y$, segue pela transitividade da contenção que

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset Y,$$

ou seja, $a \in \text{int}(Y)$. Isso prova (b).

$\square$

Proposição 5.5 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Se $\text{int}(X) \neq \emptyset$, então X é não enumerável.*

Demonstração. Se $\text{int}(X) \neq \emptyset$, então existe $a \in X$ tal que para este ponto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset X$, ou seja, o conjunto X contém um intervalo aberto, e como um intervalo é não enumerável, segue o resultado.

$\square$

Observamos que a recíproca dessa Proposição não é verdadeira, ou seja, o fato de X ser não enumerável não implica em $\text{int}(X) \neq \emptyset$.

Por exemplo, sabemos que o conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais é não enumerável, porém, mostremos que $\text{int}(\mathbb{I}) = \emptyset$, em relação aos reais. De fato, isto vai acontecer pois devido à densidade dos racionais nos reais todo intervalo aberto possuirá números racionais. Sejamos mais precisos: dado $a \in \mathbb{I}$, temos que, $\forall \varepsilon > 0$, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ segue que $\exists q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in B(a, \varepsilon)$, e então $B(a,\varepsilon) \not\subset \mathbb{I}$. Disso, segue que $\text{int}(\mathbb{I}) = \emptyset$.

Corolário 5.6 *Se $X \subset \mathbb{R}$ for enumerável, então $\text{int}(X) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha $X \subset \mathbb{R}$ enumerável. Se por absurdo tivermos $\text{int}(X) \neq \emptyset$, então pela Proposição 5.5 teríamos X não enumerável, uma absurdo! Logo, $\text{int}(X) = \emptyset$.

$\square$

Por exemplo, temos que $\text{int}(\mathbb{N}) = \text{int}(\mathbb{Z}) = \text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, visto que os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis.

Uma observação que pode parecer um tanto "chocante" consiste na seguinte: Em relação ao conjunto $\mathbb{R}$, temos que $\text{int}(\mathbb{Q}) = \text{int}(\mathbb{I}) = \emptyset$, e $\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, e no entanto $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, ou seja, um conjunto com interior não vazio é a união disjunta de dois conjuntos com interior vazio!

Definição 5.7 Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é aberto de $\mathbb{R}$ quando todos os seus pontos forem interiores, ou seja, quando $\text{int}(X) = X$.

Observe que como pela Proposição 5.4- item (a) sempre vale a contenção $\text{int}(X) \subset X$, podemos "enfraquecer" a definição acima dizendo que um conjunto X é aberto se, e somente se, $X \subset \text{int}(X)$.

Observe que o conjunto vazio $\emptyset$ é aberto pois um conjunto só deixa de ser aberto se existir algum ponto no conjunto que não seja interior, e como $\emptyset$ não possui elemento algum, a condição acima não pode ser cumprida. Logo, conclui-se que o mesmo é aberto.

A reta inteira $\mathbb{R}$ também é um conjunto aberto, pois $\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De fato, $\forall a \in \mathbb{R}$, tomando por exemplo $\varepsilon = 1$, tem-se que $B(a, 1) = (a-1, a+1) \subset \mathbb{R}$. Ou seja, $a \in \text{int}(\mathbb{R})$. Como $a \in \mathbb{R}$ é qualquer, concluímos que $\mathbb{R} \subset \text{int}(\mathbb{R})$, ou seja, $\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, visto que pela Proposição 5.4-(a), a contenção contrária sempre vale.

Proposição 5.8 *A interseção finita de conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$*

Demonstração. Sejam $X_1, X_2, ...X_n \subset \mathbb{R}$ abertos de $\mathbb{R}$.

Defina o conjunto $X := \cap_{i=1}^{n} X_i$.

Afirmamos que X é um aberto de $\mathbb{R}$. De fato, dado $a \in X$ um elemento qualquer. Vamos mostrar que $a \in \text{int}(X)$.

Como $a \in X = \cap X_i$, então $a \in X_i$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como cada X_i é aberto, tem-se que

$$a \in \text{int}(X_i),\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Então, $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n > 0$ tais que $B(a, \varepsilon_i) \subset X_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$.

Tome $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$. Então,

$$B(a, \varepsilon) \subset B(a, \varepsilon_i) \subset X_i, \; \forall i \in \{1, 2, ..., n\},$$

e, portanto,

$$B(a, \varepsilon) \subset \cap_{i=1}^n X_i = X,$$

ou seja, $a \in \text{int}(X)$.

Ou seja, dado $a \in X$, mostramos que $a \in \text{int}(X)$. Como $a \in X$ é qualquer, segue que $X \subset \text{int}(X)$, ou seja, $X = \cap_{i=1}^n X_i$ também é aberto de $\mathbb{R}$.

□

Obs.: Observe que a Proposição acima nos diz que a interseção de uma quantidade finita de conjuntos abertos resulta num conjunto aberto. Porém, a interseção de uma quantidade infinita de abertos pode não resultar num aberto. Por exemplo, se considerarmos a família $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos definida por $X_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, é fácil ver que $\cap_{n=1}^\infty X_n = \{0\}$, que não é aberto.

Convém o leitor observar por quê a demonstração dada na Proposição acima falha se tomarmos uma quantidade infinita de abertos de $\mathbb{R}$.

Felizmente, para a união temos uma resposta diferente. Na Proposição que segue estabelecemos um resultado geral (i.e., a união pode ser finita ou infinita).

Proposição 5.9 *A união de uma família de abertos de $\mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família qualquer de conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ (pode ser finita ou infinita enumerável). Defina o conjunto

$$X = \cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda.$$

Dado $a \in X = \cup_\lambda X_\lambda$, vamos mostrar que $a \in \text{int}(X)$. De fato, como $a \in \cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, então $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tal que $a \in X_{\lambda_0}$.

Como X_{λ_0} é um aberto de $\mathbb{R}$, segue que $\exists\varepsilon > 0$ tal que $B(a,\varepsilon) \subset X_{\lambda_0} \subset \cup_\lambda X_\lambda = X$.

Ou seja, $a \in \text{int}(X)$, como queríamos mostrar.

Assim, como a é qualquer em X, mostramos que $X \subset \text{int}(X)$, ou seja, $X = \cup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tamém é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$.

$\square$

Vejamos um exemplo.

Exemplo. Mostremos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é um conjunto aberto.

De fato, basta observar que

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n-1, n),$$

uma união enumerável, onde cada intervalo $(n-1, n)$, obviamente, é um aberto. Pela Proposição 5.9 segue que tal união enumerável é também um aberto de $\mathbb{R}$.

5.3 Pontos aderentes e conjuntos fechados

Definição 5.10 Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é *aderente* a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se ele for limite da alguma sequência (x_n) de pontos $x_n \in X$.

Note que todo ponto $a \in X$ é aderente a X, pois podemos considerar a sequência constante $x_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

No entanto, pode ocorrer que um ponto a seja aderente a um conjunto X sem pertencer ao mesmo (e este será o caso interessante de se estudar em limites, por exemplo). Por exemplo, se considerarmos $X = (0, 1)$, temos que $0 \notin X$, mas mesmo assim ele é aderente a X, pois podemos considerar a sequência de pontos $x_n = \frac{1}{n+1}$, onde $x_n \in (0, 1), \forall n$, com $x_n \to 0$.

Do mesmo modo, 1 também é aderente a $X = (0,1)$, pois, por exemplo, a sequência $x_n = 1 - \frac{1}{1+n}$ é tal que $x_n \in (0,1), \forall n$, e $x_n \to 1$, com $1 \notin (0,1)$.

Já foi estudado no final do Capítulo anterior o conceito de ponto aderente de sequências.

Definição 5.11 O conjunto de todos os pontos aderentes de um conjunto X chama-se *fecho* de X, e é denotado por $\overline{X}$.

Note que, como para todo $a \in X$, a sequência $(x_n) = (a, a, a, a, ...)$ é tal que $x_n \to a$, então, todo ponto de X é aderente a X, isto é, $a \in \overline{X}$, donde segue que, independente do conjunto X, sempre se tem $X \subset \overline{X}$.

Proposição 5.12 *Sejam X e Y subconjuntos do conjunto dos reais tais que $X \subset Y$. Então $\overline{X} \subset \overline{Y}$.*

Demonstração. Suponha $X \subset Y$. Dado $a \in \overline{X}$. Então, existe sequência (x_n) de X tal que $x_n \to a$. Como $X \subset Y$, segue que $x_n \in Y$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e que $x_n \to a$, i.e., (x_n) também é uma sequência de pontos de Y que converge para $a \in \mathbb{R}$, i.e., $a \in \overline{Y}$. Ou seja, mostramos que $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

$\square$

Teorema 5.13 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $a \in \overline{X}$,

(ii) $\exists\, (x_n) \subset X$ *tal que* $x_n \to a$,

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $B(a, \frac{1}{n}) \cap X \neq \emptyset$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). É a definição de ponto aderente dada.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Suponha que exista uma sequência (x_n) de pontos de X tal que $x_n \to a$. Por absurdo, suponha que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B(a, \frac{1}{n_0}) \cap X = \emptyset$.

Como $x_n \to a$, $x_n \in X$, $\forall n$, então, em particular, para $\varepsilon = \frac{1}{n_0} > 0$, segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_1$, implique em $|x_n - a| < \frac{1}{n_0}$, ou seja,

$$x_n \in B(a, \frac{1}{n_0}) \cap X = \emptyset,\ \forall n \geq n_1,$$

i.e., $x_n \in \emptyset$, $\forall n \geq n_1$, uma contradição!

Logo, vale (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Suponha que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B(a, \frac{1}{n}) \cap X \neq \emptyset$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap X$, i.e.,

$$x_n \in X \quad \text{e} \quad |x_n - a| < \frac{1}{n}. \tag{5.1}$$

Dado $\varepsilon > 0$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, o que é possível, pois $\mathbb{R}$ é arquimediano. Assim, $\forall n \geq n_0$, temos, juntamente com (5.1),

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon, \text{ i.e.,}$$

$x_n \to a$, com $x_n \in X$, $\forall n$, ou seja, a é limite de uma sequência de pontos de X, i.e., $a \in \overline{X}$. Logo, vale (i). Isso conclui a prova do Teorema.

$\square$

Proposição 5.14 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$. *Então:*

(i) *se* X *for limitado inferiormente, então* $\inf X \in \overline{X}$*;*

(ii) *se* X *for limitado superiormente, então* $\sup X \in \overline{X}$*;*

Demonstração. Faremos a prova de (i) e deixaremos a prova de (ii) para o leitor.
(i) Como $X \subset \mathbb{R}$ e é limitado inferiormente, segue que existe $\inf X$. Assim, escreva $a = \inf X$. Então, temos que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X \text{ tal que } a \leq x_n < a + \frac{1}{n},$$

ou seja,

$$B(a, \frac{1}{n}) \cap X \neq \emptyset,$$

e pelo Teorema 5.13 segue que $a \in \overline{X}$, como queríamos mostrar.

□

Vejamos um exemplo de aplicação.

Exemplo. Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e considere o intervalo aberto (a, b). Mostremos que

$$\overline{(a, b)} = [a, b].$$

De fato, já sabemos que $(a, b) \subset \overline{(a, b)}$, e como $\inf(a, b) = a$ e $\sup(a, b) = b$, pela Proposição 5.3 segue que $a, b \in \overline{(a, b)}$.

Portanto, conluímos que

$$\overline{(a, b)} = \{a, b\} \cup (a, b) = [a, b].$$

Definição 5.15 Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se *fechado* em $\mathbb{R}$ se contiver todos os pontos aderentes, ou seja, se, e somente se, $\overline{X} \subset X$.

Como sempre vale a contenção $X \subset \overline{X}$, então podemos dizer também que $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, $\overline{X} = X$.

Observe também que, em conjunto com a Definição 5.10 de ponto aderente tem-se que $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, $\forall (x_n) \subset X$, se $x_n \to a$, então $a \in X$. Ou seja, $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, toda sequência de X for convergente em X.

Como uma sequência é convergente se, e somente se, for de Cauchy, podemos dizer que $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, toda sequência de Cauchy em X for convergente em X.

Proposição 5.16 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então, X é fechado se, e somente se, o seu complementar $X^{\complement} = \mathbb{R} \setminus X$ for aberto.*

Demonstração. Suponha $X \subset \mathbb{R}$ fechado. Precisamos mostrar que $X^{\complement}$ é aberto. Ou seja, precisamos mostrar que

$$\forall a \in X^{\complement}, \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(a, \varepsilon) \subset X^{\complement}. \tag{5.2}$$

Seja $a \in X^{\complement}$.

Por absurdo, suponha que (5.2) seja falso, ou seja suponha que nenhuma bola $B(a, \varepsilon)$ esteja completamente contida em $X^{\complement}$.

Então, $\forall \varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

Em particular, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap X$.

Logo, a sequência (x_n) assim definida está contida em X, e é tal que $x_n \to a$. Mas, como X é fechado, segue que $a \in X$. Mas $a \in X^{\complement}$, um absurdo!

Logo, vale (5.2), i.e., $\forall a \in X^{\complement}, \exists \varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset X^{\complement}$, ou seja, $X^{\complement}$ é aberto.

Reciprocamente, suponha que $X^{\complement}$ é aberto. Logo, se $a \in X^{\complement}$, então $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset X^{\complement}$, i.e., $a \in \operatorname{int}(X^{\complement})$.

Mas, então, como $B(a, \varepsilon) \subset X^{\complement}$ e $X \cap X^{\complement} = \emptyset$, segue que $B(a, \varepsilon) \cap X = \emptyset$.

Então, a não é ponto aderente de X, i.e., $a \notin \overline{X}$, ou seja, $a \in \overline{X}^{\complement}$.

Logo, obtemos $a \in X^{\complement} \Rightarrow a \in \overline{X}^{\complement}$, e como a é qualquer, concluímos que $X^{\complement} \subset \overline{X}^{\complement}$, i.e., $\overline{X} \subset X$, ou seja, X é fechado.

Isso conclui a prova da Proposição.

$\square$

Vejamos alguns exemplos de aplicação da Proposição acima.

Exemplo 1. É fácil ver que o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é fechado em $\mathbb{R}$, pois $\mathbb{Z}^{\complement} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é aberto, visto que pode ser representado por

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n-1, n),$$

uma união enumerável de intervalos abertos, e, portanto, um aberto de $\mathbb{R}$.

Exemplo 2. Já vimos na seção anterior que $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são abertos de $\mathbb{R}$. Então, observe que:

- como $\mathbb{R}$ é aberto de $\mathbb{R}$, segue que o seu complementar é fechado, ou seja, $\emptyset = \mathbb{R}^{\complement}$ é fechado;
- como $\emptyset$ é aberto de $\mathbb{R}$, segue que o seu complementar é fechado, ou seja, $\mathbb{R} = \emptyset^{\complement}$ é fechado.

Ou seja, $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são simultaneamente abertos e fechados de $\mathbb{R}$!

Observe também que existem conjuntos que não são nem fechados e nem abertos. Por exemplo, o intervalo $(0, 1]$ não é fechado e nem aberto. Do mesmo modo o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é nem fechado e nem aberto (ambos em relação aos reais).

Exemplo 3. Dados $a < b$ números reais, o conjunto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é um fechado de $\mathbb{R}$, pois o seu complementar

$$[a, b]^{\complement} = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

é uma união finita de dois abertos de $\mathbb{R}$, e, portanto, pela Proposição 5.9 segue que $[a, b]^{\complement}$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Logo, pela Proposição 5.16 segue que $[a, b]$ é fechado de $\mathbb{R}$.

Corolário 5.17 *A união finita de fechados de $\mathbb{R}$ é um fechado de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ conjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que $\cup_{i=1}^n X_i$ também é um fechado de $\mathbb{R}$. Pela Proposição 5.16 temos que $X_1^{\complement}$, $X_2^{\complement}$, ..., $x_n^{\complement}$ são abertos de $\mathbb{R}$. Logo, pela Proposição 5.8 segue que $\cap_{i=1}^n X_i^{\complement}$ é um aberto de $\mathbb{R}$.

Pela Lei de De Morgan,

$$\cap_{i=1}^n X_i^{\complement} = (\cup_{i=1}^n X_i)^{\complement}$$

é um aberto de $\mathbb{R}$.

Logo, $\cup_{i=1}^n X_i$ é fechado de $\mathbb{R}$, como queríamos mostrar.

□

Corolário 5.18 *A interseção de uma família de fechados de* $\mathbb{R}$ *é um fechado de* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Deixamos a encargo do leitor.

□

Vejamos um exemplo interessante.

Exemplo. O conjunto de Cantor. Denotemos $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$, que é um fechado de $\mathbb{R}$, veja o **Exemplo 3** acima. Retirando o intervalo central aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, de comprimento $\frac{1}{3}$, obtemos o conjunto $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, que é fechado, pois é uma união finita de fechados, c.f. Corolário 5.17. De cada um dos dois subintervalos de $\mathcal{C}_1$, retiramos seus intervalos centrais abertos de comprimento $\frac{1}{3^2}$ e obtemos o conjunto $\mathcal{C}_2$, e assim continuamos indefinidamente. Ou seja, determinamos os conjuntos

- $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$, formado por $2^0 = 1$ intervalo fechado;
- $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, formado por uma união de $2^1 = 2$ intervalos fechados e portanto é fechado;
- $\mathcal{C}_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, formado por união de $2^2 = 4$ intervalos fechados e portanto é fechado;

- $\mathcal{C}_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1]$, formado por união de $2^3 = 8$ intervalos fechados e portanto é fechado;

$$\vdots$$

e continuamos este processo indefinidamente. No passo n, teremos o conjunto $\mathcal{C}_n$ formado por 2^n intervalos fechados, e, sendo um número finito de intervalos fechados, pelo Corolário 5.17 tem-se que $\mathcal{C}_n$ também é fechado. Abaixo, temos uma ilustração dos primeiros conjuntos $\mathcal{C}_n$, onde o primeiro segmento está representando o intervalo $[0, 1]$.

Observe que cada $\mathcal{C}_n$ é não vazio, pois na sua construção, as extremidades do conjunto $\mathcal{C}_{n-1}$ permanecem e, recursivamente, este também é não vazio, pois contém as extremidades dos subintervalos de $\mathcal{C}_{n-2}$, e assim por diante.

Temos, assim, uma sequência de conjuntos $(\mathcal{C}_n)_n$, tal que

$$\mathcal{C}_0 \supset \mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{C}_n \supset \mathcal{C}_{n+1} \supset \cdots$$

Com as notações acima, o conjunto $\mathcal{C}$ definido por

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \cdots$$

formado pela intersecção de todos os $\mathcal{C}_n$, é chamado de *conjunto de Cantor*.

Observe que o conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é não vazio, pois c.f. observamos acima, em cada etapa de construção dos $\mathcal{C}_n$, as extremidades dos intervalos fechados sempre permanecem, portanto, permanecerão em $\mathcal{C}$.

Ou seja, temos que o conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é uma interseção de uma família (infinita enumerável) de fechados de $\mathbb{R}$, logo, pelo Corolário 5.18 segue que o conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é um fechado de $\mathbb{R}$.

5.4 Fronteira de um conjunto

Definição 5.19 Seja (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que $a \in M$ é um *ponto de fronteira* para X se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$,

$$B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B(a, \varepsilon) \cap X^{\complement} \neq \emptyset.$$

Ou seja, dizemos que $a \in M$ é um ponto de fronteira de $X \subset M$ se, e só se, toda bola aberta centrada em a contiver tanto pontos de X como pontos fora de X.

Abaixo apresentamos uma ilustração, onde $a \in M$ é um ponto de fronteira para o conjunto X, pois, independente do $\varepsilon > 0$ tomado, sempre $B(a, \varepsilon)$ intercepta tanto X quanto $X^{\complement}$.

Denotamos o conjunto de todos os pontos de fronteira de $X \subset M$ por ∂X, e é chamado de *fronteira* de X.

Por exemplo, em $M = \mathbb{R}^2$, munido da métrica $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, temos que, dado $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_1(x, 0) \leq 1\}$, então $\partial X = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_1(x, 0) = 1\}$. Faça um desenho para visualizar.

Nosso caso de interesse é quando $M = \mathbb{R}$ e $d(x, y) = |x - y|$ a métrica usual de $\mathbb{R}$. Neste caso, a Definição 5.19 fica adaptada na seguinte:

Definição 5.20 Um ponto $a \in \mathbb{R}$ chama-se *ponto de fronteira* para um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$,

$$B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B(a, \varepsilon) \cap X^{\complement} \neq \emptyset.$$

Proposição 5.21 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então $\partial X = \overline{X} \setminus \mathrm{int}(X)$.*

Demonstração. Para provar a igualdade desejada, provaremos duas afirmações:
Afirmação 1. $\partial X \subset \overline{X} \setminus \mathrm{int}(X)$. De fato, se $a \in \partial X$, então, $\forall \varepsilon > 0$ tem-se

$$B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset, \tag{5.3}$$

e

$$B(a, \varepsilon) \cap X^{\complement} \neq \emptyset. \tag{5.4}$$

Então, de (5.3) segue pelo Teorema 5.13 que $a \in \overline{X}$ e de (5.4) segue que $a \notin \mathrm{int}(X)$. Logo, $a \notin \overline{X} \setminus \mathrm{int}(X)$, i.e., vale a Afirmação 1.

Afirmação 2. $\overline{X} \setminus \mathrm{int}(X) \subset \partial X$. De fato, dado $a \in \overline{X} \setminus \mathrm{int}(X)$. Então, como $a \in \overline{X}$, pelo Teorema 5.13 segue que $\forall n$, $B(a, \frac{1}{n}) \cap X \neq \emptyset$. Tome $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (isso é possível pois $\mathbb{R}$ é arquimediano). Assim, temos

$$B(a, \frac{1}{n}) \subset B(a, \varepsilon),$$

e então

$$\emptyset \neq B(a, \frac{1}{n}) \cap X \subset B(a, \varepsilon) \cap X,$$

ou seja,

$$B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset. \tag{5.5}$$

Além disso, como também tem-se que $a \notin \mathrm{int}(X)$, então, $B(a, \varepsilon) \not\subset X$, ou seja,

$$B(a, \varepsilon) \cap X^{\complement} \neq \emptyset. \tag{5.6}$$

De (5.5) e (5.6) segue que $a \in \partial X$, ou seja, vale a Afirmação 2.

Pelas Afirmações 1 e 2 segue o resultado.

□

No que segue apresentaremos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 1. Mostremos que $\partial(0,1) = \{0,1\}$. De fato, basta notar que, c.f. a Proposição 5.21,

$$\partial(0,1) = \overline{(0,1)} \setminus \mathrm{int}(0,1) = [0,1] \setminus (0,1) = \{0,1\}.$$

Exemplo 2. Mostremos que $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. De fato, basta observar que

$$\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \operatorname{int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}.$$

5.5 Ponto de acumulação

Nesta seção apresentaremos o conceito de ponto de acumulação, que será usado no Capítulo seguinte.

Definição 5.22 Sejam $X \subset M$ um subconjunto de um espaço métrico M e $a \in M$. Dizemos que $a \in M$ é um *ponto de acumulação* de X se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in X$, tal que $x \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$.

Em outras palavras, $a \in X$ é um ponto de acumulação de X se qualquer bola aberta centrada em a, exceto o próprio ponto a, contiver pontos do conjunto X.

No caso do espaço métrico ser $\mathbb{R}$ munido da métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, dado $X \subset \mathbb{R}$, temos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $x \in X$, tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$.

Assim, por exemplo, sendo $X = (0, 1] \subset \mathbb{R}$, temos que, por exemplo, $x = 0$ é ponto de acumulação de $(0, 1]$, pois, $\forall \varepsilon > 0$, segue que $\exists x \in (0, 1]$ tal que $x \in B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$. De fato, basta tomar, por exemplo, $x = \min\{\frac{0+\varepsilon}{2}, \frac{0+1}{2}\}$.

O conjunto de todos os pontos de acumulação de X é chamado de *derivado* de X e é denotado por X'. Assim,

$$X' = \{a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, (B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset\}.$$

Assim, por exemplo, observamos que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. De fato, obviamente se tem que $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$, pela própria definição de derivado de um conjunto. Resta, então mostrar a desigualdade contrária. Dados $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer. Pela densidade dos racionais em $\mathbb{R}$ tem-se que

$$(B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset,$$

e então $a \in \mathbb{Q}'$, e como $a \in \mathbb{R}$ é qualquer, segue que $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}'$, como queríamos mostrar.

Analogamente se mostra que $\mathbb{I}' = \mathbb{R}$ e deixamos a encargo do leitor.

Proposição 5.23 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$. *São equivalentes:*

(i) $a \in X'$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in X$ *tal que* $x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \setminus \{a\}$.

(iii) *Existe* $(x_n) \subset X$ *sequência tal que* $x_n \neq a, \forall n$ *e* $x_n \to a$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Suponha que $a \in X'$. Então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_n \in X$ tal que $x_n \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$.

Em particular, $\forall n \in \mathbb{N}$, tome $\varepsilon = \frac{1}{n}$, e então $x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \setminus \{a\}$, ou seja, vale (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Suponha que, $\forall n$ tem-se que $\exists x_n \in X$ tal que $x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \setminus \{a\}$. Então

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Então, $\forall n \geq n_0$, tem-se

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

e daí, $\forall n \geq n_0$, temos

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

ou seja, $x_n \to a$ com $x_n \neq a$, i.e., vale (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Suponha que $\exists (x_n) \subset X$, com $x_n \neq a$, $\forall n$ e tal que $x_n \to a$.

Então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, $x_n \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$, i.e., vale (i).

$\square$

Exemplo. Seja $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Note que, escrevendo $x_n = \frac{1}{n}$ e $a = 0$, tem-se que $x_n \neq a$, $\forall n$ e $x_n = \frac{1}{n} \to a = 0$. Logo, pela Proposição 5.23, segue que $0 \in X'$.

Corolário 5.24 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Se $X' \neq \emptyset$, então X é infinito.*

Demonstração. De fato, se $X' \neq \emptyset$, seja $a \in X'$. Então pela Proposição 5.23, existe sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \neq a$, $\forall n$ e $x_n \to a$, ou seja, o conjunto X é infinito, pois contém essas sequência infinita.

$\square$

Convém observar que a recíproca do Corolário acima é falsa, ou seja, se X for infinito não implica que $X' \neq \emptyset$. Por exemplo, $\mathbb{N}$ é infinito, mas $\mathbb{N}' = \emptyset$, pois $\forall a \in \mathbb{N}$, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, mas $B(a, \frac{1}{2}) \setminus \{a\}$ não contém nenhum número natural.

Proposição 5.25 *Se $X \subset \mathbb{R}$, então valem as propriedades:*

(a) $X' \subset \overline{X}$.

(b) $X \cup X' = \overline{X}$.

Demonstração. (a) Dado $a \in X'$. Então, $\forall \varepsilon > 0$, temos

$$(B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Em particular, $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$, e então $a \in \overline{X}$, como queríamos mostrar.

(b) De fato, como pelo item (a) vale $X' \subset \overline{X}$ e como vale $X \subset \overline{X}$, segue que $X \cup X' \subset \overline{X}$. Resta mostrar a desigualdade contrária.

De fato, se $a \in \overline{X}$, então, $\forall \varepsilon > 0$, temos que $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset \quad (*)$. Temos, pois, duas possibilidades:

- se $a \in X$, então $a \in X \subset X \cup X'$,
- se $a \notin X$, então devido a (*), $(B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset$, e então $a \in X' \subset X \cup X'$.

Em qualquer cos casos acima concluímos que $a \in X \cup X'$. Logo, vale que $\overline{X} \subset X \cup X'$.

$\square$

5.6 Subconjuntos compactos

Definição 5.26 Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que uma família $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos $C_\lambda \subset M$ é uma *cobertura* de X se, e somente se, $X \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$.

Ou seja, temos que $\forall x \in X$, $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in C_{\lambda_0}$.

Quando os C_λ da família que cobre X forem abertos, dizemos que a cobertura $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma *cobertura aberta* de X.

Definição 5.27 Chama-se uma *subcobertura* de uma cobertura $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de X uma subfamília $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}$, com $\Lambda_1 \subset \Lambda$, tal que ainda se tem $X \subset \cup_{\lambda\in\Lambda_1} C_\lambda$.

Frente aos conceitos acima estabelecidos, podemos finalmente apresentar a principal definição desta seção, já adaptada para o espaço métrico dos reais, nosso objeto de estudo.

Definição 5.28 Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ chama-se *compacto* de $\mathbb{R}$ quando toda cobertura aberta de K possuir uma subcobertura finita.

Proposição 5.29 *Se K for um compacto de $\mathbb{R}$, então K é limitado e fechado.*

Demonstração. Seja K um compacto de $\mathbb{R}$. A prova consiste em mostrar duas afirmações:

Af 01. K é limitado:

Para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, defina o aberto $K_m = (-m, m)$ de $\mathbb{R}$. Note que

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \mathbb{R},$$

e daí

$$K \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \mathbb{R}.$$

Portanto, a família $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, por hipótese, segue que existe uma subcobertura finita de K, ou seja, $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{m=1}^{M} K_m = (-M, M).$$

Portanto, K é limitado, pois $K \subset (-M, M)$.

Af. 02. K é fechado:
De fato, basta mostrar que $K^{\complement} = \mathbb{R} \setminus K$ é um aberto de $\mathbb{R}$.
Seja $a \in K^{\complement}$ qualquer. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina o conjunto

$$K_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| > \frac{1}{n}\} = (-\infty, a - \frac{1}{n}) \cup (a + \frac{1}{n}, +\infty).$$

Logo, cada K_n é um aberto de $\mathbb{R}$.

Afirmamos que

$$\mathbb{R} \setminus \{a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{5.7}$$

De fato, dado $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, então $x \neq a$, e daí, como $\mathbb{R}$ é arquimediano, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x - a| > \frac{1}{n_0}$, ou seja, temos que $x \in K_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Logo, temos

$$\mathbb{R} \setminus \{a\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{5.8}$$

Verifiquemos a contenção contrária: dado $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, então $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_{n_0}$, e então

$$|x - a| > \frac{1}{n_0} > 0,$$

i.e., $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq a$, ou seja, $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Logo, obtemos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset \mathbb{R} \setminus \{a\} \tag{5.9}$$

De (5.8) e (5.9) segue a igualdade (5.7).

Como $a \notin K$, segue que $K \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$, o que, por (5.7) segue que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Assim, temos que $(K_n)_n$ é uma cobertura para K. Como K é compacto, por hipótese, segue que $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{p} K_n = K_p = (-\infty, a - \frac{1}{p}) \cup (a + \frac{1}{p}, +\infty).$$

Disso, segue que $K \cap (a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}) = \emptyset$, e então $B(a, \frac{1}{p}) \subset K^{\complement}$, ou seja, $K^{\complement}$ é um aberto de $\mathbb{R}$.

Isso completa a prova da Proposição.

$\square$

No que segue, mostraremos que a recíproca da Proposição acima também é verdadeira.

Teorema 5.30 *(Teorema de Heine-Borel) Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, for limitado e fechado.*

Demonstração. Se $K \subset \mathbb{R}$ for compacto, então pela Proposição 5.29 segue que K é limitado e fechado.

Reciprocamente, suponha que K é limitado e fechado em $\mathbb{R}$ e seja $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de abertos que cobre K. Precisamos destacar uma subcobertura finita de tal família.

Por absurdo, suponha que K não está contido em nenhuma união finita de elementos de $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Como K é limitado, $\exists M > 0$ tal que $K \subset [-M, M]$, e denote por $I_1 = [-M, M]$. Dividimos I_1 pelo ponto médio obtendo $I_1' = [-M, 0]$ e $I_1^{''} = [0, M]$.

Pelo menos um dos dois conjuntos $I_1' \cap K$ ou $I_1^{''} \cap K$ é não vazio e possui a propriedade de não estar contido na união de qualquer número finito de elementos da família $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Sem perda de generalidade, assuma que $K \cap I_1'$ não está contido na união de um número finito de conjuntos de $(A_\lambda)_\lambda$, e denote $I_2 = I_1'$ (caso contrário, escreva $I_2 = I_1^{''}$).

Note que $I_2 \subset I_1$.

Divida I_2 ao meio em dois subintervalos I_2' e I_2''. Sem perda de generalidade, assuma que $K \cap I_2'$ é não vazio e não está contido em uma união finita de abertos de $(A_\lambda)_\lambda$, escreva $I_3 = I_2'$ (senão, escreva $I_3 = I_2''$). Note que $I_3 \subset I_2$.

Seguindo indutivamente, obtemos uma sequência de intervalos (I_n) fechados e encaixados. Então, pelo Teorema dos intervalos fechados e encaixados, $\exists c \in I_n$, $\forall n$.

Disso, cada intervalo I_n contém infinitos elementos de K, e $c \in \overline{K}$, pois c é o limite de uma sequência de pontos de K. Como K é fechado, segue que $c \in K$.

Então, existe A_{λ_0} em $(A_\lambda)_\lambda$ com $c \in A_{\lambda_0}$, e como A_{λ_0} é aberto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(c, \varepsilon) \subset A_{\lambda_0}$.

Por outro lado, como os I_n são obtidos por repetidas bissecções de $I_1 = [-M, M]$, então o comprimento ℓ_{I_k} do $k-$ésimo subintervalo será

$$\ell_{I_k} = \frac{M}{2^{k-2}}.$$

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{M}{2^{n_0-2}} < \varepsilon$.

Assim,

$$I_{n_0} \subset B(c, \varepsilon) \subset A_{\lambda_0}.$$

Mas então temos que se n_0 é tal que $\frac{M}{2^{n_0-2}} < \varepsilon$, então

$$K \cap I_{n_0} \subset I_{n_0} \subset A_{\lambda_0},$$

i.e., $K \cap I_{n_0}$ está contido em um único conjunto A_{λ_0} de $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, um absurdo, pois $K \cap I_{n_0}$ por construção não poderia estar contido numa união finita de abertos de $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Logo, K é compacto, concluindo a prova do Teorema.

$\square$

Um interessante exemplo de conjunto compacto é o conjunto de Cantor apresentado na Seção 5.3, visto que o mesmo é limitado e fechado.

Já o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais não é compacto pois não é limitado (e nem fechado).

Obs.: Alguns autores definem compacto como sendo limitado e fechado, ou seja, usam o Teorema de Heine-Borel acima como definição para compacto. Neste caso, a Definição 5.28 de compacto que apresentamos se torna um teorema, chamado de *Teorema de Borel-Lebesgue*.

Capítulo 6

Teoria dos limites

6.1 Definição e exemplos

Do capítulo anterior lembramos que, dado $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X, i.e., $a \in X'$, se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X \text{ tal que } \; x \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}.$$

Ou seja, $a \in X'$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$.

Este conceito é fortemente usado na definição de limite de função que apresentamos a seguir.

Definição 6.1 Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conjunto X (i.e., $a \in X'$). Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o *limite de $f(x)$ quando x tende para a*, e escrevemos

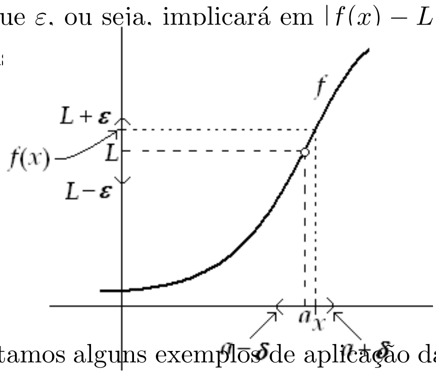
$$L = \lim_{x \to a} f(x),$$

se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que}, \forall x \in X \;:\; 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Obs. Observe que, para cada ε dado existe um δ, ou seja, a escolha de δ depende da escolha de ε.

A definição de limite nos diz que dada $f : X \to \mathbb{R}$, fixado um raio $\varepsilon > 0$, construímos uma *vizinhança* $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ centrada em $L \in \mathbb{R}$. Tomando-se um ponto de acumulação $a \in \mathbb{R}$, podemos construir uma *vizinhança perfurada* $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ em torno de a, de raio $\delta > 0$, tal que, existindo o limite, significará que se tomarmos qualquer x na vizinhança perfurada de a, e isto é indicado por $\forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta$, a distância entre x e a é menor que δ, e positiva, e isto implicará que a distância entre a imagem de x por f e o valor L ficará menor do que ε, ou seja, implicará em $|f(x) - L| < \varepsilon$. Abaixo temos um desenho para ilu



A seguir apresentamos alguns exemplos de aplicação da definição de limite.

Exemplo 1. Prove que $\lim\limits_{x\to 1} 3x + 2 = 5$.

Solução. Seja $f(x) = 3x + 2$. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que $\forall x$ tal que $0 < |x - 1| < \delta$, implique em $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Para isto, avaliemos a diferença $|f(x) - 5|$:

$$|f(x) - 5| = |3x + 2 - 5| = |3x - 3| = |3(x - 1)| = 3|x - 1|.$$

Como $0 < |x - 1| < \delta$, temos

$$|f(x) - 5| = 3|x - 1| < 3\delta.$$

Como precisamos ter $|f(x) - 5| < \varepsilon$, basta tomar $\varepsilon = 3\delta$, e daí obter

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, conseguimos obter um $\delta > 0$ que satisfaz as desigualdades exigidas da definição geral de limite. Portanto, existe o limite acima, ou seja,

$$\lim_{x\to 1} 3x + 2 = 5.$$

$\square$

Exemplo 2. Prove que $\lim_{x\to 3} x^2 - 2 = 7$.

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, vamos encontrar um $0 < \delta < 1$ que depende do ε dado tal que

$$0 < |x-3| < \delta < 1 \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon.$$

Analisando a desigualdade $|f(x) - 7|$:

$$|f(x) - 7| = |x^2 - 2 - 7| = |x^2 - 9| = |(x+3)(x-3)| = |x+3| \cdot |x-3|.$$

Como $0 < |x-3| < \delta < 1$, temos

$$|x+3| = |x - 3 + 6| \leq |x-3| + 6 < \delta + 6.$$

Daí[1]

$$|f(x) - 7| = |x+3| \cdot |x-3| < (\delta + 6)\delta = \delta^2 + 6\delta < \delta + 6\delta = 7\delta.$$

Portanto, basta tomar $\varepsilon = 7\delta$, ou seja, obtemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{7} > 0$. Isto prova a igualdade requerida.

$\square$

Exemplo 3. Mostre que $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{3}{4}$.

Solução. Primeiramente note que $x \neq -2$. Dado $\varepsilon > 0$, vamos encontrar $0 < \delta < 1$ tal que $\forall x : 0 < |x-2| < \delta$, implique em $|f(x) - L| < \varepsilon$. Avaliando esta última diferença, temos

$$|f(x) - L| = \left| \frac{2x-1}{x+2} - \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{4(2x-1) - 3(x+2)}{4(x+2)} \right| = \left| \frac{5x-10}{4(x+2)} \right| =$$

[1] Obtivemos êxito nesta cadeia de desigualdades pois observamos que, sendo $0 < \delta < 1$, temos $\delta^2 < \delta$. Realmente, se esta conclusão fosse falsa, ou seja, se $\delta^2 \geq \delta$, então teríamos $\delta^2 - \delta \geq 0$, i.e., $\delta(\delta - 1) \geq 0$. Como $\delta = 0$ ou $\delta = 1$ não podem ocorrer, por construção, segue que $\delta(\delta - 1) > 0$. Sendo $\delta > 0$ e o produto $\delta(\delta - 1)$ deve ser positivo, concluímos então que $\delta - 1 > 0$, ou seja, $\delta > 1$, o que contradiz a construção feita. Logo, realmente é verdadeira a desigualdade $\delta^2 < \delta$ para $0 < \delta < 1$.

$$= \frac{5}{4}\frac{|x-2|}{|x+2|}.$$

Como $|x-2| < \delta$, obtemos

$$|f(x) - L| < \frac{5}{4}\frac{\delta}{|x+2|}. \tag{6.1}$$

Precisamos agora fazer uma majoração para $|x+2|$. Note que

$$0 < |x-2| < \delta \Leftrightarrow |x-2| < \delta,\ x \neq 2 \Leftrightarrow -\delta < x-2 < \delta,\ x \neq 2.$$

Somando 4 em toda esta última cadeia de desigualdades obtemos

$$4 - \delta < x + 2 < \delta + 4.$$

Disso, segue que $x + 2 > 4 - \delta$. Como $0 < \delta < 1$, temos $-\delta > -1$ e daí

$$|x+2| > 4 - \delta > 4 - 1 > 3.$$

Assim, tomando o inverso desta desigualdade obtemos $\dfrac{1}{|x+2|} < \dfrac{1}{3}$ e com isto (6.1) fica

$$|f(x) - L| < \frac{5\delta}{4|x+2|} < \frac{5\delta}{4 \cdot 3} = \frac{5\delta}{12}.$$

Assim, basta tomar $\varepsilon = \dfrac{5\delta}{12}$, o que determina que podemos escolher δ como

$$\delta = \frac{12\varepsilon}{5},$$

provando que limite acima existe.

$\square$

6.2 Propriedades dos limites

Nesta seção apresentamos as principais propriedades de limites. Comecemos com a questão da unicidade. Em todos os teoremas e resultados aqui apresentados a é um ponto de acumulação do conjunto X.

Teorema 6.2 *(Unicidade do limite) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} f(x) = M$, então $L = M$.*

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ com a ponto de acumulação de X. Suponhamos que o limite exista, ou seja,

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \text{ e } \exists \lim_{x\to a} f(x) = M.$$

Vamos mostrar que $L = M$. Por absurdo, suponha que $L \neq M$.
Tome então $\varepsilon = \dfrac{|L-M|}{2} > 0$.
Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, segue que $\exists\delta_1 > 0$ tal que $\forall x \in \Omega$, $0 < |x-a| < \delta_1$ $\Rightarrow |f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Do mesmo modo, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$, segue que $\exists\delta_2 > 0$ tal que $\forall x \in \Omega$, $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, segue que valem ambas as implicações acima. Assim,

$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \leq |f(x) - L| + |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo,

$$|L - M| < \varepsilon = \frac{|L-M|}{2} \Rightarrow |L - M| < \frac{|L-M|}{2} \Rightarrow 1 < \frac{1}{2},$$

o que é um absurdo. Portanto, $L = M$, ou seja, o limite é único.

$\square$

Teorema 6.3 *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *e* $a \in X'$, *então* f *é limitada numa vizinhança do ponto* a, *ou seja, existem* $A > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que,* $\forall x \in X$ *tal que* $0 < |x - a| < \delta$, *então* $|f(x)| < A$.

Demonstração. Dado $\varepsilon = 1 > 0$. Como $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, segue que $\exists\delta > 0$ tal que, $\forall x \in X$, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1$.

Como, por propriedade dos módulos,

$$|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < 1,$$

segue que

$$|f(x)| < 1 + |L|,$$

ou seja, f é limitada por $A := 1 + |L|$ numa vizinhança do ponto a.

□

Teorema 6.4 *O limite de uma constante é a própria constante. Em outras palavras: seja $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = k$, $\forall x \in X$, onde $k \in \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k.$$

Demonstração. Queremos mostrar que $\lim\limits_{x\to a} k = k$.
Dado $\varepsilon > 0$, precisamos obter um $\delta > 0$ tal que, $\forall x$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
Como

$$|f(x) - L| = |k - k| = 0 < \varepsilon,$$

segue que qualquer $\delta > 0$ serve. Podemos tomar, por exemplo, $\delta = \varepsilon$.

□

O teorema a seguir, conhecido por *Teorema do sanduíche* ou *Teorema do confronto*, é de extrema importância para provar resultados posteriores, tais como limites notáveis.

Teorema 6.5 *(Teorema do sanduíche) Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ funções tais que, $\forall x \in X$ temos $f(x) \le g(x) \le h(x)$ e seja a um ponto de acumulação de X. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, então*

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Demonstração. Sejam f, g e h nas hipóteses do teorema.

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ segue que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que, $\forall x \in X$, $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, donde segue que

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \tag{6.2}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ segue que, dado $\varepsilon > 0$ (o mesmo), $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que, $\forall x \in X$, $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$, donde segue que

$$-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \tag{6.3}$$

Como, por hipótese, $\forall x \in X$ temos

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

subtraindo L em toda esta cadeia de desigualdades obtemos

$$f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L.$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Disso, segue que ambas as desigualdades (6.2) e (6.3) serão verdadeiras. Como $f(x) - L > -\varepsilon$, por (6.2) e $h(x) - L < \varepsilon$, por (6.3), segue que

$$-\varepsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon,$$

ou seja,

$$|g(x) - L| < \varepsilon,$$

sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Isto prova o teorema.

□

Proposição 6.6 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. São equivalentes as afirmações:*

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$;

(ii) $\exists (x_n) \subset X$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(x_n) \to L$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Suponha que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Suponha também que exista uma sequência de pontos (x_n) em X tal que $x_n \to a$, com $x_n \neq a$, $\forall n$.

Dado $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, segue que $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, implique em $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Como $x_n \to a$, $x_n \neq a, \forall n$, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implique em $0 < |x_n - a| < \delta$.

Então, em particular tem-se que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, ou seja, mostramos que $f(x_n) \to L$, i.e., vale (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Suponha que $\exists (x_n) \subset X$, $x_n \to a$ e $x_n \neq a$, $\forall n \Rightarrow f(x_n) \to L$.

Vamos mostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, ou seja, mostrar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{6.4}$$

Dado $\varepsilon > 0$. Por absurdo, suponha que não exista $\delta > 0$ satisfazendo (6.4).

Assim, em particular, para $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists (x_n) \subset X$ tal que $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, mas

$$|f(x_n) - L| \geq \varepsilon,$$

ou seja, teríamos $f(x_n) \not\to L$.

Porém, por hipótese temos que $f(x_n) \to L$, um absurdo! Logo, vale (i).

$\square$

Vejamos um exemplo.

Exemplo. Prove que não existe $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Solução. Observe que $0 \in X'$. Para mostrar que não existe o limite, vamos construir duas sequências que convirjam para o ponto de acumulação, mas que as respectivas sequências das imagens convirjam para valores diferentes. Para isso, defina as sequências (x_n) e (y_n) por

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Então, temos que $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$, mas

$$f(x_n) = \operatorname{sen} \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = \operatorname{sen}(2n\pi) \to 0$$

e

$$f(y_n) = \operatorname{sen} \frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} = \operatorname{sen}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \to 1,$$

logo concluímos que (ii) da Proposição 6.6 é falsa, e então (i) também é falsa, ou seja,

$$\nexists \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}.$$

Isso aconteceu pois perto de $x = 0$ a função $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, oscila "absurdamente" entre -1 e 1.

Teorema 6.7 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções e $a \in X'$ tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Então, valem as seguintes propriedades aritméticas*

(a) $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$ *(o limite da soma é a soma dos limites e o limite de diferença é a diferença dos limites)*

(b) $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = LM$ *(o limite do produto é o produto dos limites)*

(c) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *desde que $M \neq 0$.*

Demonstração. Sejam f e g tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$.
(a) Vamos mostrar que o limite da soma é a soma dos limites (a diferença fica como exercício). Ou seja, mostraremos que

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M.$$

Dado $\varepsilon > 0$.
Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, segue que $\exists \delta_1 > 0$ tal que $\forall x \in \Omega$, $0 < |x - a| < \delta_1$, implica em

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.5}$$

Como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, segue que $\exists \delta_2 > 0$ tal que $\forall x \in \Omega$, $0 < |x - a| < \delta_2$, implica em

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.6}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, temos que ambas as desigualdades (6.5) e (6.6) serão válidas e disso temos

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| = |f(x) - L + g(x) - M| \leq$$

$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Assim, concluímos que dado $\varepsilon > 0$ obtivemos um $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \Omega$, $0 < |x-a| < \delta$ implica em

$$|(f(x)+g(x)) - (L+M)| = |f(x) - L + g(x) - M| < \varepsilon,$$

o que prova que $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = L + M$, justamente o que queríamos.

(b) Dado $\varepsilon > 0$.
Primeiramente note que pelo Teorema 6.3, como $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, segue que f é limitada por uma constante $K > 0$ numa vizinhança do ponto a.
Assim[2], temos neste caso que $\exists \delta_1 > 0$ tal que, $\forall x \in X$, $0 < |x-a| < \delta_1$ $\Rightarrow |f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$.
Além disso[3], como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, segue que $\exists \delta_2 > 0$ tal que $\forall x \in X$, $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$.
Assim, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, as duas desigualdades acima serão válidas. Daí, avaliando a diferença $|f(x)g(x) - LM|$ para todo $x \in X$, tal que $0 < |x-a| < \delta$ obtemos, somando e subtraindo $f(x)M$, a estimativa

$$|f(x)g(x) - LM| = |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - L| \leq$$

$$\leq |f(x)g(x) - f(x)M| + |f(x)M - LM| =$$

$$= |f(x)| \cdot |g(x) - M| + |M| \cdot |f(x) - L| <$$

$$< K|g(x) - M| + |M| \cdot |f(x) - L| <$$

$$< K|g(x) - M| + (|M|+1) \cdot |f(x) - L| <$$

$$< K\frac{\varepsilon}{2K} + (|M|+1)\frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, vale a propriedade (b).

[2]Este fato serve apenas para que no final da prova tenhamos uma majoração por ε apenas, mas se não fizéssemos isso obteríamos ao final uma majoração dependendo de K e de ε, o que não seria problema algum.

[3]Pela mesma razão observada na nota acima, usamos $|M|+1$ para conseguir montar uma majoração, no final, apenas por ε. Adicionamos 1 a $|M|$ para abranger o caso quando $M = 0$.

(c) Primeiramente, observe que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

Portanto, para provar que (c) é verdadeira, basta provar a afirmação abaixo.
Af. $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$, com $M \neq 0$:
Observe que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M - g(x)}{M g(x)} \right| = \frac{|g(x) - M|}{|M| \cdot |g(x)|}.$$

Tome $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$ (isto é possível pois $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$). Além disso, temos

$$|g(x)| = |M - M + g(x)| \geq |M| - |g(x) - M| > |M| - \frac{|M|}{2} = \frac{|M|}{2}$$

Portanto, $|g(x)| > \frac{|M|}{2}$, i.e., $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}$, e daí

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|g(x) - M|}{|M| \cdot |g(x)|} < \frac{|g(x) - M|}{|M|} \frac{2}{|M|} = \frac{2}{|M|^2} |g(x) - M|.$$

Dado $\varepsilon > 0$. Assim, como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, temos que $\exists \delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{|M|^2}{2} \varepsilon.$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim, para este δ temos que $0 < |x - a| < \delta$ implica em

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \frac{2}{|M|^2} |g(x) - M| \ \text{ e } \ |g(x) - M| < \frac{|M|^2}{2} \varepsilon,$$

ou seja,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \frac{2}{|M|^2} \frac{|M|^2}{2} \varepsilon = \varepsilon.$$

Portanto vale a afirmação.
Assim, pela afirmação acima e usando o item (b), concluímos (c).

$\square$

Proposição 6.8 *Sejam* $a \in X'$ *e* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *funções tais que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *e* g *limitada em* $X \setminus \{a\}$*. Então,*

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0,$$

mesmo que não exista o limite da g *em* $x = a$*.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$. Como g é limitada em $X \setminus \{a\}$, segue que $\exists M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$, $\forall x \in X \setminus \{a\}$.

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, segue que $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in X$: $0 < |x - a| < \delta$, implica em

$$|f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Então,

$$|f(x) \cdot g(x) - 0| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Isso conclui a prova da Proposição.

$\square$

Vejamos um exemplo de aplicação.

Exemplo. Mostre que $\lim\limits_{x \to 1} |x - 1| \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x - 1}\right) = 0.$

Solução. Considerando $f(x) = |x - 1|$, temos que $\lim\limits_{x \to 1} |x - 1| = 0$ e considerando $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)$, sabemos que g é limitada em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, visto que $|\operatorname{sen} \alpha| \leq 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Então, pela Proposição acima segue que[4]

$$\lim_{x \to 1} |x - 1| \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x - 1}\right) = 0.$$

Teorema 6.9 *(limite de função composta) Sejam* $f : A \to \mathbb{R}$*,* $g : B \to \mathbb{R}$ *funções tais que* $f(A) \subset B$*,* a *ponto de acumulação de* A *e* b *ponto de acumulação de* B*, com* $b \in B$*. Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *e* $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$*, então* $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(b)$*, onde* $g(b) = c$*.*

[4] E observe que $\nexists \lim\limits_{x \to 1} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x - 1}$, basta observar o Exemplo dado após a Proposição 6.6.

Demontração. Dado $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{y\to b} g(y) = c$ segue que $\exists \delta_1 > 0$ tal que $0 < |y - b| < \delta_1$, implica em $|g(y) - c| < \varepsilon$, onde $c = g(b)$.
Ainda, como $\lim_{x\to a} f(x) = b$, para $\delta_1 > 0$, segue que $\exists \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \delta_1.$$

onde $f(x) = y$.
Ou seja, mostramos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, implica em $|g(y) - c| < \varepsilon$, i.e., $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$.
Isto mostra que $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(b)$.

□

Teorema 6.10 *(Critério de Cauchy para funções) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. São equivalentes as afirmações:*

(i) *existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que,* $\forall x, y \in X : 0 < |x - a| < \delta$ *e* $0 < |y - a| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Suponha que $\exists \lim_{x\to a} f(x) = L$. Então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, implique em $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Então, tome $x, y \in X$ tais que $0 < |x - a| < \delta$ e $0 < |y - a| < \delta$. Logo, segue que

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ e } \ |f(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Disso, temos a estimativa:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - L + L - f(y)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, vale (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Suponha que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x, y \in X : 0 < |x - a| < \delta$ e $0 < |y - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Como $a \in X'$, i.e., $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto X, pela Proposição 5.23 segue que existe uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to a$, com

$x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então, de acordo com a Proposição 6.6, para provar que $\exists L = \lim_{x\to a} f(x)$, basta mostrar que a sequência das imagens $(f(x_n))_n$ é convergente para o mesmo valor $L \in \mathbb{R}$. Ou seja, afirmamos:

Af.: A sequência $(f(x_n))_n$ é convergente.
De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos, pela hipótese que $\exists \delta > 0$, e como $x_n \to a$, para tal δ positivo segue que $\exists n_0 > 0$ tal que $\forall n \geq n_0$, implique em $0 < |x_n - a| < \delta$ (tal diferença é estritamente maor do que zero pois $x_n \neq a$, $\forall n$).

Logo, $\forall m, n \geq n_0$, temos

$$0 < |x_n - a| < \delta \quad \text{e} \quad 0 < |x_m - a| < \delta,$$

e então pela hipótese (ii) temos que

$$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon,$$

isto é, $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_n) \to L$, e então pela Proposição 6.6 segue (i).

$\square$