Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 - Conjuntos e funções

1. Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer de um universo E. Mostre que

   (a) $X \subset Y \Rightarrow \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$.

   (b) $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

2. Sabendo que X é um conjunto qualquer de um espaço E, diga quais das sentenças abaixo são verdadeiras, justificando:

   (a) $X \in \mathcal{P}(X)$. (b) $X \subset \mathcal{P}(X)$. (c) $\{X\} \subset \mathcal{P}(X)$. (d) $\{X\} \in \mathcal{P}(X)$.

3. Demonstrar que $B - A$ é subconjunto de $A^{\complement}$.

4. Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$. Prove que $B = C$.

5. Sejam $A, B \subset E$. Prove que $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $A \subset B^{\complement}$. Prove também que $A \cup B = E$ se, e somente se, $A^{\complement} \subset B$.

6. Sejam A e B subconjuntos do universo E. Prove que se $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = E$, então $B = A^{\complement}$ e $A = B^{\complement}$.

7. Prove a propriedade da distributividade em relação à diferença simétrica:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

8. Demonstrar que para toda família $\{A_i \,:\, i \in I\}$, onde I é um conjunto de índices, de um espaço fundamental E, tem-se as leis de De Morgan:

   (a) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\complement}$ (b) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcup_{i \in I} A_i^{\complement}$

9. Demonstrar que

   (a) $\forall \lambda \in \Lambda,\ A_\lambda \subset B \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \lambda} A_\lambda \subset B$.

   (b) $\forall \lambda \in \Lambda,\ A_\lambda \subset B_\lambda \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$

10. Sejam $B_n = \{[1, 1 + \frac{1}{n}] \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. Determine $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ e $\cap_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

11. Sejam L e M conjuntos não vazios e considere, respectivamente, as famílias $(A_\ell)_{\ell \in L}$ e $(B_\mu)_{\mu \in M}$. Prove que

$$\left(\bigcap_{\ell \in L} A_\ell\right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\ell,\mu) \in L \times M} (A_\ell \cup B_\mu).$$

12. Mostre que se $f : A \to B$ e E, F subconjuntos de A, então $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ e $f(E \cap F) \subset F(E) \cap f(F)$. Exiba um exemplo para justificar que a contenção contrária da segunda propriedade, em geral é falsa.

13. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer em um universo E e $(M_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos indexada por $i \in I$ em E tal que $M_i \subset A, \forall i \in I$. Considere $f : A \to B$ uma função. Mostre que

$$f\left(A \cap \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)\right) \subset \bigcup_{i \in I} f\left(A \cap M_i\right).$$

14. Sejam $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos, com $X_\lambda \subset A$, $\forall \lambda \in \Lambda$ e $f : A \to B$ uma função. Mostre que

$$f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(X_\lambda).$$

15. Seja $f : A \to B$ uma função e $M, N \subset B$. Mostre que

$$f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N).$$

16. Seja $f : A \to B$ uma função e $(B_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos indexada por $i \in I$, tal que $B_i \subset B$, $\forall i \in I$. Mostre que

$$f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \text{ e que } f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

17. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$.
    (a) f é injetiva? Justifique.
    (b) f é sobrejetiva? Justifique.
    (c) Represente geometricamente em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (i.e., no plano cartesiano), o conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$. Em seguida, represente geometricamente, $f([0, 1] \times [0, 1])$.

18. Mostre que se $f : A \to B$ é estritamente crescente, então f é injetiva. Idem para estritamente decrescente.

19. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ definida por $f(x, y) = (3x - 2, 2y + 5)$. Prove que f é injetiva. A função f é sobrejetiva? Justifique.

20. Dizemos que dois conjuntos A e B são *equivalentes* quando existir uma bijeção entre eles. Com base nesta definição, mostre que são equivalentes os seguintes conjuntos:
    (a) $[-2, 2]$ e $[0, 1]$. (b) $(3, 5]$ e $[-2, 7)$. (c) $(2, 9)$ e $(0, 1)$.

21. Os conjuntos $(-2, 7)$ e $[5, 11)$ são equivalentes? Justifique.

22. Mostre que a função $f : \mathbb{R} - \{\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ definida pela lei $f(x) = \dfrac{ax - b}{cx - d}$, em que a, b, c e d são constantes reais, $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$, é uma aplicação bijetiva.

23. Verifique mediante um exemplo que a composição de funções, em geral, não é comutativa.

24. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to D$. Supondo g bijetiva, prove que f é injetiva se, e somente se, $g \circ f$ é injetiva.

25. Sejam as aplicações $f : A \to B$, $g : A \to B$ e $h : B \to D$. Prove que se h é injetiva e $h \circ g = h \circ f$, então $g = f$.

26. Mostre que se $f : A \to B$ é injetiva e $E \subset A$, então $f^{-1}(f(E)) = E$.

27. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.

    (a) Mostre que se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

    (b) Mostre que se $g \circ f$ é sobrejetiva, então g é sobrejetiva

28. Seja $f : X \to Y$ uma função e $A \subset X$. Definimos a *função característica* de A por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A \\ 0 & \text{se} \quad x \notin A \end{cases}$$

    Prove que

    (a) $A \subset B \Rightarrow \chi_A \leq \chi_B$.

    (b) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

    (c) $\chi_{A^\complement} = 1 - \chi_A$.

29. Seja $\{0,1\}^X$ o conjunto de todas as funções reais de X em $\{0,1\}$, também denotado por $\mathbf{2}^X$. Defina a função $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathbf{2}^X$ por $\varphi(A) = \chi_A$. Mostre que φ é uma bijeção.