Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Lic. em Matemática e Lic. em Física
Segunda Prova e Álgebra Linear I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 22/08/2017

Questão 01. Considere as bases β e γ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$:

$$\beta = \{(1,1);\ (0,-1)\} \quad \text{e} \quad \gamma = \{(1,2);\ (-1,3)\}.$$

Obtenha a matriz de mudança de base $[I]_\beta^\gamma$. Em seguida, dado o vetor $\vec{u}$ tal que $[\vec{u}]_\gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, obtenha $[\vec{u}]_\beta$ usando a matriz da mudança.

Questão 02. Obtenha a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$L(1,1,1) = (4,12),\ L(1,1,0) = (0,4) \ \text{ e } \ L(1,0,0) = (1,3).$$

Em seguida, determine $\ker L$, $\mathrm{Im}(L)$ e suas respectivas dimensões.

Questão 03. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x,y,z) = (3x - 2y + z, y - 2z, -z).$$

(a) Determine os autovalores e autovetores de T, caso existam.

(b) Mostre que T é inversível e determine a transformação inversa T^{-1}.

Questão 04. Seja P_2 o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2, munido de suas operações usuais. Defina a aplicação $T : P_2 \to P_2$ por

$$T(f(t)) = 2 \cdot f(t) + t \cdot f'(t).$$

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Mostre que $\beta = \{1 + t\,, 1,\ -t^2\}$ é uma base para P_2.

(c) Obtenha a matriz da transformação T na base β, ou seja, $[T]_\beta^\beta$.

Questão 05. No espaço vetorial dos polinômios P_2 de grau menor ou igual a 2, munido de suas operações usuais, defina a aplicação $\langle .\,,. \rangle : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

(a) Mostre que a aplicação $\langle .\,,. \rangle$ define um produto interno em P_2.

(b) Verifique se os vetores $p(t) = 1 + t$ e $q(t) = t - t^2$ são ortogonais.

(c) Induza uma norma $||\cdot||$ a partir do produto interno e obtenha a norma do vetor $f(t) = -2t + t^2$.