GABARITO: (A.L.I) 28/11/2017.

01) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ -2x + 2y - z = 2 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{matrix} = -2+2+6+6-4-1 = 7$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} = -2-2+0-6-4-0 = -14$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{matrix} = 0-4+6-0-4+2 = 0$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{matrix} = 4+0+4+4-0+2 = 14$$

Portanto, teremos:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-14}{7} = -2 \; ; \; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{0}{7} = 0 \; ; \; z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$$

ou seja; $S = \{(-2, 0, 2)\}$.

1,0

01

02) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_2 - 2l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{l_3 \leftrightarrow l_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{l_3 \leftrightarrow l_3 + l_2}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_3 \to -1.l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_1 - 2.l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$

$\underbrace{\qquad}_{I_3} \qquad \underbrace{\qquad}_{= A^{-1}}$

1,5

(b) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$;

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +(2-0) = 2$

02

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Assim, como $\det A = 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} = A_{32} = 1$,

segue que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1,5

03) $A = B \cdot C$; B inversível.

(a) Como B é inversível, $\exists\, B^{-1}$ inversa de B.

Assim:

$$A = B \cdot C \Rightarrow B^{-1} \cdot A = \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{= I} \cdot C$$

1,0

$$\Rightarrow C = B^{-1} \cdot A$$

$$\Rightarrow \det C = \det (B^{-1} \cdot A) = \det B^{-1} \cdot \det A = \frac{1}{\det B} \cdot \det A$$

$$\Rightarrow \boxed{\det C = \frac{\det A}{\det B}}.$$

(b) Uma seq. de operações elem. sobre linhas que reduz B à I_n (o que é possível, pois B é inversível) corresponde à existência de matrizes elementares E_1, $E_2, \dots, E_k$ tais que

$$E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot B = I$$

1,0

Assim, como $A = B \cdot C$, temos, que multiplicando à esquerda, respectivamente, por $E_1, E_2, \dots, E_k$, vamos obter:

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = \underbrace{E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot B}_{= I} \cdot C \Rightarrow E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = C,$$

logo, segue o resultado.

$\square$

04) $A \cdot A^T = I$.

(a) $\det(A \cdot A^T) = \det I = 1$.

$\parallel$

0,5 $\det A \cdot \det A^T = 1$. ; como $\det A^T = \det A$, temos:

$\det A \cdot \det A = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det A = \pm 1}$.

(b) $(A \cdot B)(A \cdot B)^T = (A \cdot B)(B^T \cdot A^T) = A(\underbrace{B \cdot B^T}_{I})A^T =$

$\parallel$

I, pois B é ortogonal

0,5 $= A \cdot A^T = I$

pois A é ortogonal

$\Rightarrow A \cdot B$ é ortogonal.

---

05) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$.

$= \{(x, y, 0, 2x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Dados $\vec{u} = (a, b, 0, 2a + b)$ e

$\vec{v} = (m, n, 0, 2m + n)$, temos que:

0,5 • $\vec{u} + \vec{v} = (a, b, 0, 2a + b) + (m, n, 0, 2m + n)$

$= (a + m, b + n, 0\ 2(a + m) + b + n) \in W$

• $\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (a, b, 0, 2a + b) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b, 0, 2 \cdot \alpha a + \alpha b) \in W$

(onde $\alpha \in \mathbb{R}$).

Logo, W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) $W = \{(x, y, 0, 2x+y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x, 0, 0, 2x) + (0, y, 0, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

0,5

$= \{x \cdot (1, 0, 0, 2) + y \cdot (0, 1, 0, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$= [(1, 0, 0, 2) ; (0, 1, 0, 1)]$. 0,3

Como $(1, 0, 0, 2)$ e $(0, 1, 0, 1)$ são L.I, tem-se que $\dim W = 2$ 0,2 e, portanto o conj: $\{(1, 0, 0, 2); (0, 1, 0, 1)\}$ é uma base para W.

(c) $\vec{u} = \alpha \cdot (1, 0, 0, 2) + \beta \cdot (0, 1, 0, 1)$

$(3, -4, 0, 2) = \alpha(1, 0, 0, 2) + \beta(0, 1, 0, 1)$

0,5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -4 \\ 2\alpha + \beta = 2 \end{cases} \quad (2 \cdot (3) + (-4) = 2)$$

Logo, $\vec{u} = 3 \cdot (1, 0, 0, 2) - 4(0, 1, 0, 1)$.

06) W não é subespaço vetorial de $M_{3\times3}(\mathbb{R})$, pois, por exemplo, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ não pertence a W pois não é inversível.

1.0

---

07) $a(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + b.(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) + c.(2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (a+b+2c)\vec{v}_1 + (-a-c)\vec{v}_2 + (b+2c)\vec{v}_3 = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2c=0 \\ -a-c=0 \Rightarrow a=-c \\ b+2c=0 \rightsquigarrow b=-2c \end{cases}$$

1.0

$a+b+2c=0 \rightarrow -c \cancel{-2c} \cancel{+2c} = 0$

$\Rightarrow \boxed{c=0}$

Logo: $\Rightarrow \boxed{a=b=0}$.

Logo, o conj. é L.I.

---

08) Não forma uma base pois tal conj. é L.D.:

1.0

$\alpha(0,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma.(1,2,1) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta+\gamma=0 \rightsquigarrow \beta=-\gamma \\ \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+\gamma=0 \rightsquigarrow \alpha=-\gamma \end{cases} \Rightarrow -\gamma-\gamma+2\gamma=0$$

$\boxed{0=0}$.

$\Rightarrow \alpha=-\gamma$ e $\beta=-\gamma \Rightarrow$ são L.D.

0.7

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Física e Matemática
Primeira Prova de Álgebra Linear I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 28/11/2017

Questão 01. Resolva o sistema linear $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ -2x + 2y - z = 2 \end{cases}$ através da regra de Cramer.

Questão 02. Calcule a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de duas maneiras:

(a) usando o algoritmo para obter a inversa via operações elementares sobre linhas;

(b) através da matriz adjunta.

Questão 03. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ tais que $A = BC$, com B inversível.

(a) Prove que $\det C = \dfrac{\det A}{\det B}$.

(b) Prove que qualquer sequência de operações elementares sobre linhas que reduz B à I_n, também reduz A à C.

Questão 04. Dizemos que uma matriz quadrada A é *ortogonal* se $A \cdot A^T = A^T A = I$.

(a) Se A for uma matriz ortogonal, mostre que $\det A = \pm 1$.

(b) Se A e B forem duas matrizes ortogonais de mesmo tamanho, mostre que $A \cdot B$ também é ortogonal.

Questão 05. Considere o subconjunto $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.

(a) Mostre que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Determine uma base para W e $\dim W$.

(c) Represente o vetor $\vec{u} = (3, -4, 0, 2)$ como uma combinação linear dos vetores da base de W determinada no item anterior.

Questão 06. O conjunto $W = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \,:\, A \text{ é inversível}\}$ munido da adição usual de matrizes e o produto usual de um escalar por uma matriz é um subespaço vetorial de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$? Justifique.

Questão 07. Se $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é um conjunto L.I. de vetores de um espaço vetorial V, então prove que o conjunto $\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3, 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3\}$ também é L.I.

Questão 08. O conjunto $\beta = \{(0, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ forma uma base para o $\mathbb{R}^3$? Justifique.

Questão	01	02	03	04	05	06	07	08
Valor	1,0	3,0	2,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0