Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática
Terceira Prova de Cálculo I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 17/08/2017.

"A natureza era para ele um livro aberto, cujas letras ele podia ler sem esforço."
Albert Einstein, ao citar Newton.

Questão 01. Calcule a derivada $f'(x)$ da função definida parametricamente por

$$x = \sqrt{1+t^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{t-1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Questão 02. Um cabo telegráfico submarino consiste de um núcleo de fios de cobre com uma capa de material isolante. Se x indica a razão do raio do núcleo para a espessura da capa, sabe-se que a velocidade de sinalização é dada por

$$V(x) = x^2 \ln \frac{1}{x}.$$

Mostre que a velocidade máxima se obtém quando $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Questão 03. Suponha que f e g sejam funções contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b), tais que $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$. Prove que $f(b) < g(b)$.

Sugestão: Aplique o Teorema do Valor Médio na função $h(x) = f(x) - g(x)$.

Questão 04. Considerando $\ln 10 = 2,3026$, use diferenciais para encontrar um valor aproximado para $\ln 9,86$.

Questão 05. Um tanque de água possui o formato de um cone circular invertido, com base de raio $2m$ e altura igual a $4m$. Se a água está sendo bombeada para o tanque a uma taxa de $2m^3/\text{min}$, determine a taxa na qual o nível de água está aumentando quando a água estiver a $3m$ de profundidade.

Questão 06. Considere a função real de variável real f cuja lei é dada por $f(x) = x^2 - 4x^3$.

(a) Determine o domínio dessa função e os seus zeros e assíntotas, se houverem.

(b) Determine os intervalos onde f é crescente e decrescente e encontre os pontos de máximo e de mínimo locais, se existirem.

(c) Determine os intervalos onde o gráfico de f possui concavidade para cima e onde f possui concavidade para baixo, determinando pontos de inflexão, se existirem.

(d) Com os resultados acima obtidos, esboce o gráfico de f.

Questão 07. Use a Regra de L'Hôpital para calcular o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \arctan x}{e^x + e^{-x} - 2}.$$