GABARITO DA 2ª PROVA DE SEQ. E SÉRIES.

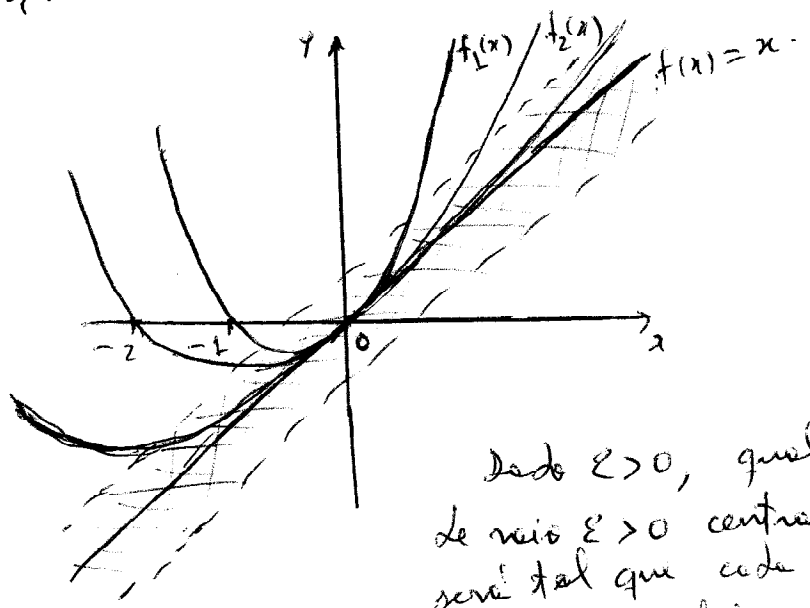
QUESTÃO 01:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2+nx}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^2}{n}+\frac{nx}{n}}{\frac{n}{n}} = x.$$

0,5

função limite: $f(x) = x$ $\quad (f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

1,5



$f_1(x) = x^2 + x$

$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

$\vdots$

1,0

Dado $\varepsilon > 0$, qualquer faixa de raio $\varepsilon > 0$ centrada em $y = x$ será tal que cada f_n não ficará inteiramente contida na referida faixa, pois todas as f_n são parábolas e então $\forall n$, terá um zero em 0 e outro em $-n$, onde $-n$ estará fora da faixa. Logo, a convergência não é uniforme.

QUESTÃO 02: $f_n(x) = e^{-nx^2}$.

(a) $$f(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{nx^2}} = 0.$$

Logo, $f_n \longrightarrow f \equiv 0$.

AF: A convergência é uniforme. De fato, temos que:

$$d_n = \sup_{x\in[1,2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,2]} |e^{-nx^2} - 0| = \sup_{x\in[1,2]} \frac{1}{e^{nx^2}}$$

Note que, sendo $g(x) = e^{-nx^2}$, temos que

$$g'(x) = -2nx \cdot e^{-nx^2} = -\frac{2nx}{e^{nx^2}} < 0, \quad \forall n, \forall x \in [1,2]$$

Logo, g é decrescente, e portanto,

20

$$d_n = \sup_{x\in[1,2]} \frac{1}{e^{nx^2}} = \max_{x\in[1,2]} \frac{1}{e^{nx^2}} = \frac{1}{e^{nx^2}}\Big|_{x=1} = \frac{1}{e^n},$$

e então

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0,$$ e então

a sequência f_n converge para $f \equiv 0$ uniformemente.

(b) Como $f_n \rightrightarrows 0$, segue que

05

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx = \int_1^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_1^2 0\,dx = 0.$$

<u>QUESTÃO 03</u>: Se $g: X \to \mathbb{R}$ é limitada, $\exists M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$, $\forall x \in X$.

Como $f_n \rightrightarrows f$ em X segue que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$, $\forall n \geq n_0$.

15

Assim,

$$|f_n(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)| = |f_n(x) - f(x)|\cdot|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon;$$

$\square$

i.e., $f_n \cdot g \rightrightarrows f \cdot g$.

02

QUESTÃO 04: $r \in (0,1)$ e é tal que

$$\left| \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} \right| \leq r \quad , \forall x \in [a,b] \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

Como f_1 é limitada, $\exists\, M > 0$ tal que $|f_1(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$.

Assim:

$$\frac{|f_n(x)|}{|f_{n-1}(x)|} \leq r \longrightarrow |f_n(x)| \leq r \cdot |f_{n-1}(x)| \leq r^2 \cdot |f_{n-2}(x)|$$

$$\leq \cdots \leq r^{n-1} \cdot |f_1(x)| \leq r^{n-1} \cdot M$$

2,0

Ou seja, a série $\sum f_n$ é tal que

- $|f_n(x)| \leq M \cdot r^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde $0 < r < 1$;
- a série $\sum M r^{n-1} = M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ é convergente, pois é a série geométrica de razão $r \in (0,1)$.

Logo, pelo teorema do teste M. de Weierstrass, segue que $\sum f_n$ converge uniformemente em $[a,b]$.

QUESTÃO 05:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n-1)!}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cancel{(n-1)!} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot \cancel{(n-1)!}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\left[\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}}_{\to e}\right]^{(-1)}} = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

$\Longrightarrow \boxed{R = e}$ RAIO DE CONVERGÊNCIA

QUESTÃO 06: $\forall x \in (-1,1)$, temos as séries geométricas:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad e \quad \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n;$$

que convergem uniformemente em $(-1,1)$, e como $f_n(x) = x^n$ e $g_n(x) = (-1)^n x^n$ são integráveis, $\forall n$, temos que, $\forall x \in (0,1)$:

- $$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1};$$

- $$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n \cdot dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Assim, $\forall x \in (-1,1)$, vale:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + 1\right) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = 2x + 0 + 2\frac{x^3}{3} + 0 + \frac{2x^5}{5} + \cdots$$

$$= 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right).$$

1.0

$\ln 5 = ?$ (com 3 "termos").

Note que: $\frac{1+x}{1-x} = 5 \iff 1+x = 5-5x$

$\iff 6x = 4 \iff \boxed{x = \frac{2}{3}}$

Assim:

$$\ln 5 = \ln \frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} \approx 2 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{5}\right) =$$

0.6

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3^4} + \frac{32}{3^5 \cdot 5}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 3^4 \cdot 5 + 8 \cdot 3 \cdot 5 + 32}{3^5 \cdot 5}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{810 + 120 + 32}{1215}\right) = \frac{1924}{1215}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\ln 5 \approx \frac{1924}{1215}}.$$

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática
Segunda Prova de Sequências e Séries
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 16/08/2017

Questão 01. Mostre que a sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$$

converge simplesmente para a função identidade $f(x) = x$. A convergência é uniforme? Justifique mediante um desenho.

Questão 02. Seja $f_n : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = e^{-nx^2}$.

(a) Obtenha a função limite $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e mostre que (f_n) converge uniformemente para f em $[1, 2]$.

(b) Calcule $\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\, dx$.

Questão 03. Sejam (f_n) uma sequência de funções definida em X tal que $f_n \to f$ uniformemente e g uma função limitada em X. Mostre que $f_n \cdot g \to f \cdot g$ uniformemente em X.

Questão 04. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uma série de funções definida em $[a, b]$ tal que existe $r \in (0, 1)$ de modo que

$$\left| \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} \right| \leq r, \ \forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suponha que $f_1(x)$ seja limitada. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em $[a, b]$.

Questão 05. Obtenha o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} (x - \pi)^n.$$

Questão 06. Obtenha as séries de potências das funções $\ln(1 + x)$ e $\ln(1 - x)$. A partir delas, mostre que

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ... \right), \ \forall x \in (-1, 1).$$

Usando os 3 primeiros termos e dando um valor conveniente para x, encontre um valor aproximado para $\ln 5$.