Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 12 de Exercícios

1. Faça um estudo completo de cada função abaixo, determinando domínio, zeros, assíntotas (se existirem), pontos críticos, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximos e mínimos, concavidades e pontos de inflexão.

   (a) $f(x) = x^4 - 2x^3$ (b) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$ (c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x-3}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$ (e) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (f) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3-1}$

   (g) $f(x) = (1-x)x^{\frac{1}{5}}$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ (i) $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

   (j) $f(x) = 2 + (x-3)^{\frac{1}{3}}$ (k) $f(x) = 2\tan\frac{x}{2}$; $x \in (-\pi, \pi)$ (ℓ) $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

   (m) $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}$ (n) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$

2. Um fabricante pretende construir uma caixa retangular a partir de uma lâmina de 8cm×5cm, cortando um quadrado de cada um de seus cantos. Ache o lado desse quadrado para que o volume da caixa a ser construída seja máximo. (Resp. 1cm).

3. A taxa (em mg de carbono/m^3/h) na qual a fotossíntese ocorre para uma espécie de fitoplâncton é modelada pela função

$$p = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

   onde I é a intensidade de luz (medida em milhares de velas). Para qual intensidade de luz p é máximo? (Resp. $I = 2$).

4. Encontre o número positivo tal que a soma dele com o seu inverso seja tão pequena quanto possível.

5. Numa dada comunidade, uma certa epidemia alastra-se de tal forma que x meses após o seu início, $P\%$ da população estará infectada, onde

$$P = \frac{30x^2}{(1+x^2)^2}.$$

   Em quantos meses o número de infectados atingirá o máximo e que porcentagem da população esse número representa? (Resp. 1 mês, $P = 7,5\%$).

6. Se uma lata fechada com volume 16π cm^3 deve ter a forma de uma cilindro circular reto, ache a altura e o raio, se um mínimo de material deve ser usado em sua fabricação.
   (Resp. $R = 2$ cm e $h = 4$ cm).

7. Calcular o volume máximo do cilíndro circular reto que pode ser inscrito em um cone de 12cm de altura e 4cm de raio da base, de modo que os eixos do cilindro e do cone coincidam.
   (Resp. $R = \frac{8}{3}$cm e $h = 4$cm, e portanto $V = \frac{256\pi}{9}$cm^3).

8. Prove que uma função polinomial de terceiro grau possui exatamente um ponto de inflexão. Faça alguns desenhos para ilustrar também.

9. Seja $f(x) = x^n$, onde $n > 1$. Mostre que o gráfico de f tem um ponto de inflexão se n for ímpar e não tem nenhum ponto de inflexão se n for par.

10. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$. Que condições as constantes b e c devem satisfazer para que 1 seja ponto de inflexão de f?

11. (**Conc. Docente IFSul Sapucaia -2011**) Considere a função $f(x) = 2x^3 - x^2 + 7$. Em relação a essa função, é correto afirmar que

    (a) em $x = 6$ tem-se um ponto de inflexão.

    (b) em $x = \frac{1}{3}$ tem-se um ponto de mínimo relativo.

    (c) o valor máximo da função é 7.

    (d) a função possui uma única raiz real e positiva.

12. Faça o traçado gráfico de uma função contínua f que satisfaça todas as condições dadas em cada item.

    (a) $f(0) = 1$; $f(2) = 3$; $f'(0) = f'(2) = 0$; $f'(x) < 0$ se $|x - 1| > 1$; $f'(x) > 0$ se $|x - 1| < 1$; $f''(x) > 0$ se $x < 1$ e $f''(x) < 0$ se $x > 1$.

    (b) $f(0) = 4$; $f(2) = 2$; $f(5) = 6$; $f'(0) = f'(2) = 0$; $f'(x) > 0$ se $|x - 1| > 1$; $f'(x) < 0$ se $|x - 1| < 1$; $f''(x) < 0$ se $x < 1$ ou se $|x - 4| < 1$; $f''(x) > 0$ se $|x - 2| < 1$ ou se $x > 5$.

    (c) $f(1) = 4$; $f'(x) > 0$ se $x < 1$; $f'(x) > 0$ se $x < 1$; $f'(x) < 0$ se $x > 1$; $f''(x) > 0$ para todo $x \neq 1$.