Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear
Lista 07 de Exercícios
Espaços com produto interno e Espaços normados
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Mostre que a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_2 y_2 + 4x_1 y_1$$
é um produto interno.

2. Dados $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, verifique se a expressão abaixo define um produto interno em $\mathbb{R}^2$:
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 - u_1 v_2 - v_2 u_1 + 3u_2 v_2.$$

3. Sendo $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vetoresm em $\mathbb{R}^2$, defina a aplicação
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{u_1 v_1}{a^2} + \frac{u_2 v_2}{b^2},$$
onde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ estão fixados. Prove que tal aplicação define um produto interno. Induza uma norma daí e em seguida, calcule a norma de $\vec{u} = (1, -1)$.

4. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, -3)$ e $\vec{w} = (1, -4, 3)$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, munido com o produto interno usual, verifique quais pares são ortogonais.

5. Mostre que as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ no espaço vetorial $C([-\pi, \pi])$ com produto interno definido por $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ são ortogonais.

6. Considerando o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$, determine o valor de k para que os vetores $\vec{u} = (k, 2, k)$ e $\vec{v} = (k, 3, 1)$ sejam ortogonais.

7. Seja $V = C([-1, 1])$ munido do produto interno $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{3}$. Mostre que f e g são ortogonais.

8. Considere $f(t) = 3t - 5$ e $g(t) = t^2$ no espaço dos polinômios $P(t)$ munido com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.
   (a) Calcule $\langle f, g \rangle$.
   (b) Calcule $||f||$ e $||g||$.
   (c) Usando os itens anteriores, verifique o Teorema de Cauchy-Schwarz.

9. (Sel. Mestrado UFSM/2010/1) Seja V o espaço vetorial real dado pelas funções contínuas no intervalo $[0, 2\pi]$.
   (a) Mostre que $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ é um produto interno em V.
   (b) Exiba dois vetores não nulos ortogonais em relação ao produto interno dado no item (a).
   (c) Considere $[f, g] = \int_0^{2\pi} f(x)g(2\pi - x)dx$. Então $[f, g]$ define um produto interno em V?

10. Seja $C([a,b])$ o espaço vetorial de todas as funções $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínuas. Mostre que a aplicação $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ é um produto interno. Induza daí uma norma $||.||$ e calcule $||f||$, sendo $f(x)=x-1$.

11. Sejam f,g funções contínuas em $[0,1]$. Prove que

$$\left[\int_0^1 f(t)\cdot g(t)dt\right]^2 \leq \left(\int_0^1 f(t)^2dt\right)\cdot\left(\int_0^1 g(t)^2dt\right).$$

12. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, prove que

$$\int_0^\pi x^n \operatorname{sen} x\,dx \leq \frac{\pi^{n+1}}{\sqrt{4n+2}}.$$

13. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^3$ para mostrar que dados valores reais positivos a_1, a_2 e a_3, vale

$$(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)\geq 9.$$

14. (Sel. Mestrado UFRGS/2007/2) Se $a_1, a_2, ..., a_N$ são números reais, $N\in\mathbb{N}$, então prove que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^N a_i^2.$$

15. Mostre que em um espaço vetorial V com um produto interno vale a lei do paralelogramo:

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2+||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 2||\vec{u}||^2+2||\vec{v}||^2,$$

onde $||\cdot||$ é a norma induzida do produto interno.

16. Seja V um espaço vetorial com um produto interno. Para quaisquer vetores $\vec{u},\vec{v}\in V$, prove que os vetores $||\vec{u}||\vec{v}+||\vec{v}||\vec{u}$ e $||\vec{u}||\vec{v}-||\vec{v}||\vec{u}$ são ortogonais.