Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Sequências e Séries - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 5 de Exercícios - Séries de funções

1. (Dirichlet, 1863) Mostre que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot p_n$ converge, se as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ forem limitadas e se (p_n) for uma sequência monótona tendendo a zero.

2. Se $\sum |g_n|$ converge uniformemente em X e se existe $K > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, mostre que $\sum f_n g_n$ converge uniformemente em X.

3. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, prove que as séries de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$$

têm ambas raio de convergência igual a $\frac{1}{\sqrt{L}}$.

4. Determine o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$, onde a_n é dada por

(a) $\dfrac{1}{n^n}$ (b) $\dfrac{n^n}{n!}$ (c) $\dfrac{1}{\ln n}$, $n \geq 2$ (d) $n^{-\sqrt{n}}$

5. Determinar o intervalo de convergência e o raio de convergência de cada série de potências:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}(x+3)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{(n+1)2^n}$

6. Mostre que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tanh x)^n}{n!}$ converge uniformemente em $[-c, c]$, para qualquer $c > 0$.

7. (a) Mostre que $\dfrac{\pi}{4} = \arctan \dfrac{1}{2} + \arctan \dfrac{1}{3}$. **Sugestão.** Chame de $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$ e $\beta = \arctan \frac{1}{3}$ e use a fórmula $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$.

(b) Usando a expansão em série de potências da função $\arctan x$, deduza que

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \ldots\right).$$

8. **(Sel. Mestr. UFSM 2013/1)** Prove que é uniformemente convergente, em $[0, +\infty)$, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}.$$

9. Seja (f_n) uma sequência de funções $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$. Mostre que $f_n \to f \equiv 0$ simplesmente, mas não uniformemente. Verifique que $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \longrightarrow \frac{1}{2}$.

10. Obtenha expansões em série de potência para $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ e $g(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.

11. A *função de Bessel de ordem 1* é definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}.$$

Mostre que J_1 satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2 - 1) J_1(x) = 0.$$

12. Mostre que a função $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ é uma solução da equação diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0.$$

13. Seja $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$. Mostre que a série $\sum f_n(x)$ converge para todos os valores de x, mas que a série de derivadas $\sum f_n'(x)$ diverge quando $x = 2n\pi$.

14. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, onde $|x| < 1$.

    (a) A partir da série acima, encontre uma representação em séries de potências para $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, apresentando o seu raio de convergência.

    (b) A partir do item anterior e usando integrais, encontre a representação em séries de potências para $\arctan x$. Qual é o seu raio de convergência?

    (c) Conclua que o número irracional π pode ser escrito como a série numérica

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

15. Obtenha as séries de potências das funções $\ln(1+x)$ e $\ln(1-x)$. A partir delas, mostre que

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{5} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right), \ \forall x \in (-1, 1).$$

Usando os 3 primeiros termos e dando um valor conveniente para x, encontre um valor aproximado para $\ln 2$.

16. Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = e^{x^4}$. Qual o seu raio de convergência?

17. Usando as séries de potências de e^{-x^2} e $\arctan x$, obtenha a expansão em série de

$$f(x) = e^{-x^2} \arctan x.$$

18. Use séries para calcular os limites:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$