Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Sequências e Séries - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 4 de Exercícios - Sequências de funções

1. Prove que $f_n(x) = nx(1-x)^n$ converge simplesmente, porém não uniformemente, em $[0,1]$, para a função identicamente nula.

2. Verifique se as sequências de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ em cada item a seguir converge simplesmente e uniformemente, para a função $f : X \to \mathbb{R}$ dada pelo limite das f_n.

   (a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$, com $X = [0,1]$.

   (b) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\arctan(nx)$, $X = (0,+\infty)$.

   (c) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$, $X = \mathbb{R}$.

   (d) $f_n(x) = \sqrt{n^2x+n} - \sqrt{n^2x}$, $X = (0,+\infty)$.

3. Se $f_n \to f$ e $g_n \to g$ simplesmente em X, prove que $f_n + g_n \to f + g$ simplesmente em X. O mesmo para $f_n g_n$.

4. Sejam (f_n), (g_n) sequências de funções limitadas em X que convergem uniformemente em X para f e g, respectivamente. Mostre que $(f_n g_n)$ converge uniformemente em X para fg.

5. Mostre que a sequência (x_n) definida por $x_n = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ não converge uniformemente no intervalo $[0,2]$, mostrando que a função limite não é contínua nesse intervalo.

6. Mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^2 e^{-nx^2}dx = 0$.

7. Se $a > 0$, mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^\pi \frac{\operatorname{sen} nx}{nx}dx = 0$.

8. Seja (f_n) a sequência definida por $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$, para $x \in [0,1]$. Mostre que (f_n) converge uniformemente a uma função integrável f e que
$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

9. Seja $f_n(x) = nx(1-x)^n$ para $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Discuta a convergência das sequências $(f_n)_n$ e $(\int_0^1 f_n)_n$.

10. Seja a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$. Prove que (f_n) converge uniformemente para 0 mas a sequência das derivadas f_n' não converge em ponto algum do intervalo $[0,1]$.

11. Mostre que a sequência de funções $g_n(x) = x + \frac{x^n}{n}$ converge uniformemente no intervalo $[0,1]$ para uma função derivável g e a sequência das derivadas g_n' converge simplesmente em $[0,1]$ mas g' não é igual a $\lim\limits_{n\to\infty} g_n'$.