Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios

1. Em cada item a seguir, determine se a função é contínua no ponto x_0 indicado e calcule as derivadas laterais em x_0. Decida se f é derivável ou não em x_0. Em seguida, determine a função derivada $f'(x)$.

   (a) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se} \quad x \leq -4 \\ -x-6, & \text{se} \quad x > -4 \end{cases}$ no ponto $x_0 = -4$.

   (b) $f(x) = |x-2|$ no ponto $x_0 = 2$.

   (c) $f(x) = \begin{cases} -x^{\frac{2}{3}}, & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^{\frac{2}{3}}, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$ no ponto $x_0 = 0$.

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no ponto $x_0 = 0$.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 3 - x, & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

   (a) Verifique se f é contínua em $x = 2$.

   (b) Verifique se f é derivável em $x = 2$.

   (c) Esboce os gráficos de f e f' num mesmo plano cartesiano e dê uma interpretação geométrica.

3. Prove que se $f(x)$ é derivável em $x = a$, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \text{ racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ irracional} \end{cases}$. Prove que f é derivável em $x = 0$.

5. Seja $\alpha > 1$. Se f é uma função tal que satisfaz $|f(x)| \leq |x|^\alpha$, prove que f é derivável em $x = 0$.

6. **Definição.** Chama-se *reta normal* ao gráfico de uma função f em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ a reta perpendicular à reta tangente a f em P, passando por este ponto.

   Por exemplo, sabemos que a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 0$ é o eixo horizontal ox, e então a reta normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no mesmo ponto $x_0 = 0$ será o eixo vertical oy.

   Com base na definição acima, determine em cada item abaixo a equação das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto indicado.

   (a) $f(x) = (2x^2 - 3x)^3$, em $x = 2$. (b) $f(x) = \ln(2x - 1)$, em $x = 1$.

   (c) $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{x + 2}$, em $x = 1$. (d) $f(x) = \text{sen}\,((3x-1)\pi) + \sqrt{x+1}$, em $x = 3$.

7. Uma partícula move-se ao longo de uma reta segundo a equação $s(t) = 5 - \cos^2 t$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s e a cm/s^2 forem, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula em t s, ache v e a em termos de s.

8. Uma partícula move-se ao longo de uma reta obedecendo à lei

$$s(t) = \operatorname{sen}(4t + \frac{\pi}{3}) + \operatorname{sen}(4t + \frac{\pi}{6}),$$

onde s é expresso em metros e t em segundos. Qual a aceleração da partícula no instante de tempo $t = 4$ segundos?

9. Uma jamanta pega uma pista de saída de uma rodovia em $t = 0$. Sua posição depois de t segundos é dada por $s(t) = 84t - t^3$ metros, para $0 \leq t \leq 5$.

   (a) Qual é a velocidade da jamanta no momento em que pega a pista de saída?

   (b) Qual a sua aceleração em $t = 4s$?

10. Em ótica se utiliza a equação das lentes $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, onde f é a distância focal de uma lente convexa e p e q são as distâncias da lente ao objeto e da imagem, respectivamente. Encontre uma fórmula geral para a taxa de variação de q com relação a p quando f se mantém fixa.

11. Mostre que a taxa de variação do volume de uma esfera com respeito ao raio é igual à área da superfície.

12. No decorrer de uma experiência, derrama-se um líquido sobre uma superfície plana de vidro. Se o líquido vertido recobre uma região circular e o raio desta região aumenta uniformemente, qual será a taxa de crescimento da área ocupada pelo líquido, em relação à variação do raio, quando o raio for igual a 5 cm ?

13. Derivar a função $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \ln \tan \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$, simplificando a resposta ao máximo.

14. Calcule a derivada de cada função abaixo:

   (a) $f(x) = (3x^2 - 5x^3)^2$

   (b) $f(x) = \dfrac{3x - 4}{5x^2 - x + 1}$

   (c) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 2}$

   (d) $f(x) = \ln(4x^3 - 2x^2)$

   (e) $f(x) = (1 - 2x^2 - x^3) \cdot \ln(x^3 - x - 1)$

   (f) $f(x) = \ln \dfrac{3 - 2x}{x + 1}$

   (g) $f(x) = e^{3x^2 - 1}$

   (h) $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(2 - 3x)$

   (i) $f(x) = \operatorname{sen}(3x - 2) \cdot \ln(x - 1)$

   (j) $f(x) = \tan(\ln(1 - 2x)) + \sqrt{x}$

15. Calcule a derivada de cada função implícita abaixo.

   (a) $y^3 - 3y + 2ax = 0$

   (b) $\cos(xy) = x$

   (c) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$

   (d) $y = \cos(x+y)$

   (e) $\sqrt{xy} + 2y = \sqrt{x}$

   (f) $\ln(x^2+y^2) - 3x^2y^3 = \sqrt{x+y}$

16. Ache a equação da reta tangente à curva de equação $x^3 + y^3 = 2xy + 5$ em $P(2, 1)$.

17. Encontre a equação da reta tangente à curva de equação $y = \dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ em $P(3, 3)$.

18. Mostre que a tangente à curva $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ no ponto $P(a,b)$ é dada pela equação $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$.

19. O *folium de Descartes* é o gráfico da equação $x^3 + y^3 = 3xy$. Esta curva foi proposta inicialmente René Descartes como um desafio a Pierre de Fermat(1601-1665) para achar sua reta tangente em um ponto arbitrário. Ache a equação da reta tangente ao folium no ponto $A(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

20. (**Conc. Docente IF-Sul Pelotas 2008**) A equação da reta tangente, y como função de x, à curva $x^2 = \frac{x+2y}{x-2y}$ no ponto $P(1,0)$ é

    (a) $x + 2y - 1 = 0$.
    (b) $x - 2y - 1 = 0$.
    (c) $x - 4y + 1 = 0$.
    (d) $x + 4y - 1 = 0$.