Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo I - Prof. Maurício Zahn
Lista 11 de Exercícios
Teoremas de Rolle e de Lagrange

1. Mostre que $f(x) = x^3 + 9x - 4$ tem no máximo uma raiz real.
   Sugestão: Faça a prova por absurdo, ou seja, suponha que f tenha duas raízes reais α e β. Aplique o teorema de Rolle em seguida.

2. Seja $f(x) = \tan x$.

   (a) Mostre que $\nexists\, c \in (0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$, mesmo que $f(0) = f(\pi) = 0$.

   (b) Explique por que o resultado de (a) não viola o teorema de Rolle.

3. Seja $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$, mas não existe um número c em $(-1, 1)$ tal que $f'(x) = 0$. Por quê isso não contradiz o Teorema de Rolle?

4. Em cada item abaixo, mostre que a função dada satisfaz as hipóteses do Teorema de Lagrange (Teor. do Valor Médio) no intervalo $[a, b]$ dado e determine o valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

   (a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ em $[0, 1]$.

   (b) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ em $[0, 1]$.

   (c) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ em $[-1, 1]$.

   (d) $f(x) = \ln(x - 1)$ em $[2, 4]$.

   (e) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$ em $[-2, 1]$.

   (f) $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5. Se $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, mostre que não existe um número real c em $(-2, 2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}.$$

   Por quê não existe tal c?

6. Suponha que $3 \leq f'(x) \leq 5$ para todos os valores de x. Mostre que $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$.

7. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$.

8. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que

$$\left| \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} \right| \leq |\beta - \alpha|, \quad \text{se} \quad x \neq 0.$$

9. Mostre que $\sqrt{1 + h} < 1 + \dfrac{1}{2}h$, se $h > 0$.

10. Aplique o Teorema do Valor Médio a $f(x) = \sqrt{x}$ em $[100, 101]$ para mostrar que

$$\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

    para algum c em $(100, 101)$.

11. Explique por que o Teorema do Valor Médio não se aplica à função $f(x) = |x|$ no intervalo $[-1, 2]$.

12. Demonstre a identidade $\operatorname{arcsen}\dfrac{x-1}{x+1} = 2\arctan\sqrt{x} - \dfrac{\pi}{2}$.

13. Prove que $2\operatorname{arcsen} x = \arccos(1 - 2x^2)$, $x \geq 0$.

14. Prove que $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$.

15. Use o T.V.M. e seus corolários para provar que valem as desigualdades:

    (a) $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$, $\forall x \geq 0$.

    (b) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq \operatorname{arcsen} x \geq x$, $\forall x \in [0, 1)$.

    (c) $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x$, $\forall x > 0$.

    (d) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} < \operatorname{arcsen} x < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2x-1}{2\sqrt{1-x^2}}$, para $\frac{1}{2} < x < 1$. Observe que $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

16. Seja f duas vezes derivável no intervalo $[0, 2]$. Mostre que se $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ e $f(2) = 4$, então existe um $x_0 \in (0, 2)$ tal que $f''(x_0) = 0$.

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f(\pi) = \pi$ e $f(e) = e$. Mostre que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 1$.

18. Suponha que f é uma função derivável com $f'(x) = x^2 f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e tal que $f(0) = 1$. Mostre que $f(x) \cdot f(-x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.