Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Sequências e Séries
Prof. Dr. Maurício Zahn

Trabalho I - Valor: 5,0 - Data de entrega: 14/06/2017.

Nome: **Matrícula:**

Instruções

(a) Este trabalho deve ser entregue na aula do dia 14/06/2017.

(b) As questões devem ser resolvidas em folha de ofício tamanho A4, onde a capa do mesmo deve ser esta folha de questões. Pode ser resolvido à lápis.

(c) Vocês podem procurar resolver este trabalho conjuntamente, quanto a isso não há problemas e até mesmo é salutar que assim o façam. Porém, lembrem-se de que cada um deve resolver as questões da sua maneira e com as suas palavras. Sendo assim, procurem não "copiar" um do outro, pois se for constatada cópia, a referida questão será devidamente descontada.

(d) Este trabalho será devolvido corrigido na aula posterior à primeira prova. Nesta ocasião, pode ser solicitada a resolução no quadro de algum item deste trabalho no sentido de esclarecer possíveis dúvidas e mal entendidos. Isso poderá alterar a nota do mesmo, no sentido de melhorar a mesma, caso o referido aluno perceba e corrija eventuais equívocos que cometeu.

Questão 01. A sequência de Fibonacci (a_n) é definida indutivamente por

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad \text{para } \ n \geq 1 \end{cases}.$$

Seja $x_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$. Prove que:

(a) $a_{n+1}^2 - a_n^2 - a_n \cdot a_{n+1} = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{(-1)^n}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}$.

(c) $x_1 > x_3 > x_5 > ... > x_{2n+1} > x_{2n} > ... > x_6 > x_4 > x_2$. (Sugestão: verifique antes que $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $f(x) = \frac{1}{1+x}$)

(d) Justifique que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

(e) Justifique que c é a raiz positiva da equação $f(x) = x$ e que c é o número de ouro

$$c = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}$$

Questão 02. Mostre que a p-série alternada

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^p} + ...$$

converge absolutamente se $p > 1$, converge condicionalmente se $0 < p \leq 1$ e diverge se $p \leq 0$.