Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática
Primeira Prova de Sequências e Séries
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 21/06/2017

Questão 01. Seja a sequência (x_n), onde $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Questão 02. Considere a sequência de números reais

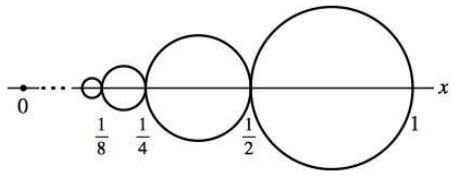
$$\sqrt{6},\ \sqrt{6+\sqrt{6}},\ \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}},\ \cdots$$

Mostre que essa sequência é convergente e encontre seu limite.

Questão 03. Mostre que a sequência (x_n) dada por $x_n = (-1)^n \cos n - \frac{3}{2}\operatorname{sen} n^2$ possui uma subsequência convergente, justificando seus argumentos.

Questão 04. Sejam $0 < r < 1$ e (x_n) uma sequência tais que $|x_{n+1} - x_n| < r^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência (x_n) é de Cauchy.

Questão 05. Encontre a área total dos infinitos círculos no intervalo $[0, 1]$, conforme o esquema abaixo, justificando que tal soma infinita é convergente.



Questão 06.

(a) Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências de termos positivos e suponha que exista um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},\ \forall n \geq n_0.$$

Prove que se a série $\sum b_n$ converge, então a série $\sum a_n$ também converge.

(b) Prove por indução matemática sobre n, a desigualdade de Bernoulli: se $n \in \mathbb{N}$ e se $x \geq -1$, vale

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(c) Usando os itens (a) e (b), prove a Proposição a seguir:

Proposição. *Se $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e se existir $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tal que*

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq p,\ \forall n,$$

então a série $\sum a_n$ converge.

Questão 07. Em cada série dada abaixo, use um teste adequado para verificar a convergência ou divergência:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Questão 08. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge condicionalmente.