

Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Sequências e Séries - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 3 de Exercícios - Séries numéricas

1. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Solução. Basta efetuar a decomposição

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

e considerar a soma parcial

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

2. (Sel. Mestr. UFSM 2009/1) Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$.

3. O grande matemático suíço Leonhard Euler chegou, algumas vezes, a conclusões erradas em seu pioneiro trabalho sobre séries infinitas. Por exemplo, Euler “deduziu” que

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

e

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

substituindo $x = -1$ e $x = 2$ na fórmula

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Qual foi o problema ocorrido no raciocínio de Euler?

Solução. Porque a série dada é a série geométrica $\sum x^n$, e a mesma converge se, e somente se $|x| < 1$. Logo, para $x = -1$ e $x = 2$ a série não converge, e por isso as “igualdades” acima não têm sentido.

4. Dadas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, com $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ e $b_n = \log(1 + \frac{1}{n})$, mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Calcule explicitamente as somas parciais s_n e t_n , respectivamente, dessas séries e mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$, logo, as séries dadas são divergentes.

5. Analisar a convergência das séries a seguir e determinar a sua soma.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

6. Para todo $p \in \mathbb{N}$ fixado, prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$$

converge.

Solução. Basta notar que, para $p \in \mathbb{N}$ fixado,

$$n(n+1)(n+2) \cdots (n+p) > n \cdot n \cdot n \cdots n = n^{p+1},$$

e então

$$\frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p)} < \frac{1}{n^{p+1}},$$

e como a série hiper-harmônica $\sum \frac{1}{n^r}$ é convergente quando $r > 1$ (e no nosso caso $r = p+1 > 1$), segue pelo teste da comparação que a convergência da série $\sum \frac{1}{n^{p+1}}$ garante a convergência da série desejada.

7. (Sel. Mestr. UFSM 2011/1)

- (a) Considere duas sequências de números reais não-negativos (a_n) e (b_n) tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ para algum $c > 0$. Mostre que $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.
- (b) Use o resultado anterior para estudar a convergência das séries $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ e $\sum \frac{1}{2^n - 1}$.

8. Verificar se as séries a seguir são convergentes ou divergentes:

- | | | | |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 5}}$ | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$ | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$ | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ |
| (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + n + 2}{5n^3 + 3n}$ |
| (i) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ | (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{1+n^2}$ | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccot} n$ | (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ |

Dicas/resoluções.

(a) Tome a_n sendo o termo geral da série dada e $b_n = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, e use o Teorema do teste da comparação do limite para concluir.

(b) Usamos o teste da raiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

logo, tal série é convergente.

(c) Usando o teste da razão vamos encontrar

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}}{\frac{n!}{e^n}} = \frac{(n+1)n!}{e^n \cdot e} \cdot \frac{e^n}{n!} = \frac{n+1}{e} \rightarrow \infty,$$

logo, a série é divergente.

(d) Aplique o teste da razão para concluir a convergência da série.

(e) Teste da razão.

Nos itens (i), (j) e (k) use o teste da integral.

9. Se $\sum a_n$ converge e $a_n > 0, \forall n$, mostre que as séries $\sum(a_n)^2$ e $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ também convergem.

Solução. Para que $\sum a_n$ seja convergente, com $a_n > 0$, para todo n , obrigatoriamente se tem que $0 < a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $(a_n)^2 < a_n, \forall n$. Como $\sum a_n$ converge, pelo Teste da comparação segue a convergência de $\sum(a_n)^2$.

Do mesmo modo, como

$$\frac{a_n}{1+a_n} < a_n, \forall n,$$

pelo mesmo teste segue a convergência da série $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$.

10. Prove que, para todo $a \in \mathbb{R}$, a série $a^2 + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \dots$ é convergente e calcule a sua soma.

11. (Sel. Mestr. UFSM 2013/2) Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ for convergente e $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ converge. (dica: prove que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ partindo de $0 \leq (a-b)^2$).

Solução.

Primeiramente, observe que

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

e então $a^2 + b^2 \geq 2ab$, donde segue que

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Assim, observando que

$$\frac{\sqrt{x_n}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{x_n} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{(\sqrt{x_n})^2}{2} = \frac{1}{2n^2} + \frac{x_n}{2},$$

e como as séries hiper-harmônica $\sum \frac{1}{n^2}$ e $\sum x_n$ são convergentes, segue que a série $\sum \frac{1}{2n^2} + \frac{x_n}{2}$ é convergente, e então pelo teste da comparação segue o resultado.

12. Mostre que a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

13. Mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge. Sugestão: utilize o segundo limite notável: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Solução. Aplicando o teste da razão, vamos obter

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{n}{n+1} - 1\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1} \cdot \frac{-1}{n+1} \cdot n}.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}} \right]^{\frac{-1}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1,$$

e poratanto a série é convergente.

14. Seja $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^n n!}{n^n}$, onde k é uma constante. Prove que s converge absolutamente se $|k| < e$ e diverge se $|k| > e$.

Solução. Aplicando o teste da razão

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{k^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{k^n \cdot n!} \right| = |k| \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Agora, basta proceder como no exercício anterior.

15. Sejam $a_n > 0$, para todo n , com $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Prove que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n = 0$.

Solução. Como a série $\sum a_n$ é convergente, escreva

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Então, a sequência (s_N) das somas parciais, dada por

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

é limitada, onde s é uma cota superior. Assim,

$$0 \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \right| = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq \frac{s}{N},$$

e como $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{s}{N} = 0$, pelo Teorema do Sanduíche aplicado à cadeia de desigualdades acima, o resultado segue.

16. (Sel. Mestr. UFRGS 2013/2) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente e $C > 0$.

(a) Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$ é absolutamente convergente.

(b) Prove que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz $|f(x)| \leq C|x|$ para $x \in \mathbb{R}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ é absolutamente convergente.

(c) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ é absolutamente convergente.

17. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^n$$

é absolutamente convergente.

18. A série $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \dots$ tem termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende para zero. Entretanto, é divergente. Por que isso não contradiz o Teorema de Leibniz?