Prof. Dr. Maurício Zahn
UFPel

Sequências e séries

TEXTO DE MENSAGEM...

Dedicamos este trabalho a ...

Prefácio

Este material foi elaborado durante o Primeiro Semestre letivo de 2017, para atender a Disciplina de Sequências e Séries que ministrei para os cursos Matemática da UFPel. Estas notas de aula estão sendo escritas como um material de apoio para os estudantes, em conjunto com as listas de exercícios, e corresponde ao conteúdo desenvolvido na referida disciplina.

Maurício Zahn

Conteúdo

1 Sequências **1**

1.1 **Primeiros conceitos** 1

1.2 **Limite de sequência** 3

1.3 **Sequências limitadas** 6

1.4 **Propriedades dos limites** 9

1.5 **Sequências monótonas** 11

1.6 **Dinâmica das convergências** 19

1.7 **O Teorema de Bolzano-Weierstrass** 26

1.8 **Sequência de Cauchy** 31

1.9 **Ponto aderente** 35

1.10 **Limites infinitos** 37

2 Séries numéricas **39**

2.1 **Introdução** 39

2.2 **Série geométrica** 43

2.3 **Propriedades das séries** 44

2.4 **Testes de convergência** 49

2.4.1 **Teste da comparação** 49

2.4.2 **Teste da comparação do limite** 51

2.4.3 **Teste da integral** 52

2.4.4 **Teste da razão** 54

2.4.5 **Teste da raiz** 56

2.5 **Séries absolutamente convergentes** 57

2.6 **Série alternada** 59
2.6.1 **Teste da série alternada** 59
2.6.2 **Outros testes para séries alternadas** 61
2.7 **Rearranjo de séries** 62

3 Sequências de funções **67**
3.1 **Conceito** 67
3.2 **Convergência simples e uniforme** 68
3.3 **Propriedades da convergência uniforme** 75

4 Séries de funções **83**
4.1 **Conceitos** 83
4.2 **Teste M de Weierstrass** 85
4.3 **Séries de Potências** 88
4.4 **Derivação termo a termo. Série de Taylor** 92
4.4.1 **Algumas séries de potências usuais** 98

Índice Remissivo **100**

Capítulo 1

Sequências

Neste capítulo vamos definir um tipo especial de função, chamado *sequência*, bem como suas principais propriedades de convergência. Comecemos com a definição de sequência.

1.1 Primeiros conceitos

Definição 1.1 Uma sequência numérica $(x_n)_n$ é definida como uma lista infinita de números reais

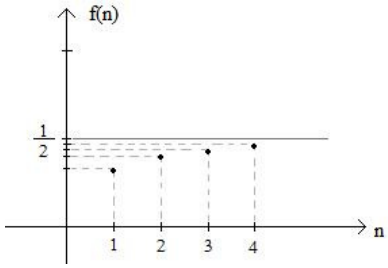
$$(x_n)_n = (x_1, x_2, x_3, ...),$$

onde os $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Outra maneira equivalente de definir uma sequência é considerá-la como uma função de variável natural $x_n = x(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ à qual, para cada $n \in \mathbb{N}$ associa uma imagem x_n, e o conjunto imagem, ordenadamente, $x_1, x_2, ...$, define a sequência (x_n).

Os números x_n da imagem de uma sequência são chamadas de termos ou elementos da sequência. Podemos denotar os termos da sequência tanto por $x(n)$ como x_n, sendo que esta última é a mais usada.

Como o domínio de uma sequência é sempre o conjunto dos naturais, simplesmente consideramos a expressão que a define.

Exemplo. Se $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$, então $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$, $x_3 = \dfrac{3}{7}$, $x_4 = \dfrac{4}{9}$ e assim por diante. A figura abaixo ilustra o comportamento gráfico desta sequência.



A sequência $(x_n)_n$ dada acima pode ser representada pela lista ordenada infinita de seus termos:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, ...) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, ..., \frac{n}{2n+1}, ...).$$

Definição 1.2 Dizemos que duas sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são iguais se, e somente se, $x_i = y_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

A definição acima pode parecer um tanto ingênua, no entanto atente-se de que duas sequências serão iguais somente quando os termos de mesma posição de ambas forem iguais, ou seja, (x_n) será igual a (y_n) somente quando $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, e assim por diante. Um contra-exemplo interessante de se ver, por exemplo, é considerar a sequência (x_n) definida por

$$x_n = \frac{1}{n}$$

e a sequência $(y_n)_n$ definida por

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{2}{n+2}, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

Embora ambas possuam mesmos elementos, elas não são iguais, pois ao listarmos ordenadamente os termos de (x_n) e os termos de (y_n) vamos obter

$$(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$$

e

$$(y_n) = (1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{4}, ...)$$

Definição 1.3 Seja (x_n) uma sequência. Tomando-se um subconjunto infinito de índices $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ de $\mathbb{N}$, definimos a partir da sequência dada, uma *subsequência*. Notamos uma subsequência da sequência (x_n) por (x_{n_k}).

Observe que, num certo sentido, uma subsequência de uma sequência, embora seja uma sequência, pois continua sendo uma lista infinita ordenada, a mesma não está sendo ordenada por índices $1, 2, 3, ...$, mas por um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ de elementos $n_1, n_2, ..., n_k, ...$ Por essa razão, definir uma sequência como uma lista infinita é mais preciso do que definir como sendo uma função com domínio no conjunto dos naturais, muito embora exista uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e o conjunto $\{n_1, n_2, ..., n_k, ...\}$, definida por $\varphi : k \in \mathbb{N} \mapsto x_{n_k}$.

Exemplo. Dada a sequência $x_n = (-1)^n$ temos $x_1 = x_3 = x_5 = ... = x_{2n-1} = ... = -1$ e $x_2 = x_4 = x_6 = ... = x_{2n} = ... = 1$, ou seja, destacamos da sequência original duas subsequências: a subsequência (x_{2n-1}) dos termos ímpares e a subsequência (x_{2n}) dos termos pares.

1.2 Limite de sequência

Como sequências são funções, podemos indagar sobre os seus limites. Porém, como a sequência (a_n) está definida para valores inteiros de n, o único limite que faz sentido é o de a_n quando $n \to +\infty$.

Por exemplo, note que os elementos da sequência $(x_n)_n$ definida por

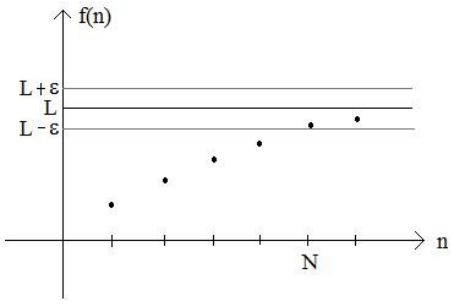
$$x_n = \frac{n}{2n+1}$$

estão cada vez mais próximos de $\frac{1}{2}$, embora nenhum elemento da sequência assuma o valor $\frac{1}{2}$. Intuitivamente vemos que podemos obter um elemento da sequência tão próximo de $\frac{1}{2}$ quanto desejarmos, bastando tomar o número de

elementos suficientemente grande. Expressando de outra forma, temos que $\left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right|$ pode se tornar menor que qualquer número positivo ε, contanto que n seja suficientemente grande. Por isso, dizemos que o limite da sequência $\dfrac{n}{2n+1}$ é $\dfrac{1}{2}$.

Definição 1.4 A sequência (x_n) tem um limite L se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir um número $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se n for um inteiro de tal modo que $n \geq n_0$, então $|x_n - L| < \varepsilon$ e escrevemos

$$\lim_{n+\infty} x_n = L$$



Em símbolos:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Em algumas ocasiões vamos utilizar a notação $x_n \to L$, que significa $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$.

Vejamos um exemplo de aplicação.

Exemplo. Prove que a sequência $x_n = \frac{n}{2n+1}$ tem limite $\frac{1}{2}$.

Solução. Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implique em

$$|x_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon.$$

Vamos estimar $|x_n - \frac{1}{2}|$.

$$|x_n - \frac{1}{2}| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Como queremos achar um $n \geq n_0$, então, supondo determinado, podemos escrever

$$2n + 1 \geq 2n_0 + 1 > 2n_0,$$

e daí

$$2(2n+1) > 2(2n_0) = 4n_0,$$

e portanto

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{4n_0}.$$

Assim, como queremos que $|x_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$, se impormos que $\frac{1}{4n_0} < \varepsilon$, vamos obter $n_0 > \frac{1}{4\varepsilon}$.

Ou seja, acabamos de mostrar que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ (e é tal que $n_0 > \frac{1}{4\varepsilon}$), tal que, $\forall n \geq n_0$, implique em $|x_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$, ou seja, acabamos de provar que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Neste caso, na prática, podemos tomar $n_0 = \lfloor \frac{1}{4\varepsilon} \rfloor + 1$, onde $\lfloor a \rfloor$ denotará a parte inteira do número real a.

Apenas para ilustrar a prova acima, se tomarmos $\varepsilon = 0,1$, então teremos que $n_0 > \frac{1}{4\cdot 0,1} = 2,5$, ou seja, neste caso, tomaremos $n_0 = \lfloor 2,5 \rfloor + 1 = 3$. Assim, segue que, a partir do índice $n = 3$, a distância do termo x_n da sequência $x_n = \frac{n}{2n+1}$ ao valor $\frac{1}{2}$ fica menor do que $0,1$.

Por exemplo, se tomarmos $n = 4$ vamos notar que

$$|x_4 - \frac{1}{2}| = \left|\frac{4}{9} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{18} \approx 0,056 < 0,1 = \varepsilon.$$

Definição 1.5 Se a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiver um limite, dizemos que ela é *convergente*, e x_n converge para o limite. Se a sequência não for convergente, ela é dita *divergente*.

Por exemplo, a sequência (x_n) definida por $x_n = (-1)^n$ é divergente (Justifique!)

Exemplo. Determine se a sequência (x_n) definida por $x_n = n \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}$ é convergente.

Solução. Como $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}$ e $\dfrac{1}{n}$ tendem a zero quando n tende a infinito, lembrando do primeiro limite notável, temos

$$\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi.$$

Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \pi$, se n for inteiro positivo. Dessa forma, a sequência dada é convergente e converge para π.

1.3 Sequências limitadas

Definição 1.6 O número L é chamado de *cota inferior* da sequência (x_n) se $L \leq x_n$ para todo n inteiro positivo, e o número S é chamado de *cota superior* da sequência (x_n) se $x_n \leq S$ para todo n inteiro positivo.

No caso quando uma sequência (x_n) possuir uma cota inferior, dizemos que a mesma é *limitada inferiormente*, e no caso de possuir uma cota superior, dizemos que a mesma é *limitada superiormente*.

Esses conceitos de limitação superior e inferior de uma sequência podem ser facilmente estendidos para conjuntos ordenados.

Definição 1.7 Dizemos que uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, ela tiver cotas superior e inferior, ou seja, quando for limitada superiormente e inferiormente.

Ou seja, (x_n) é dita limitada se, e somente se, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ou, de uma maneira mais simples, dizemos que (x_n) é limitada se

existir $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Um conceito importante que apresentamos a seguir é de ínfimo e supremo de um conjunto.

Definição 1.8 Seja X um conjunto limitado (superiormente e inferiormente, ou seja, X possui cotas inferior e superior, no mesmo sentido mencionado anteriormente). Definimos como o *supremo* do conjunto X, e denotamos por $\sup X$, como a menor das cotas superiores para X e o *ínfimo* do conjunto X, e denotamos por $\inf X$, como sendo a maior das cotas inferiores para X. Mais precisamente, temos que, denotando por $M = \sup X$ e $m = \inf X$,

- M é supremo de X se, e somente se
  (a) $x \leq M$, $\forall x \in X$, i.e., M é uma cota superior para X;
  (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tal que $M - \varepsilon < x \leq M$; i.e., M é a menor cota superior de X.
- m é ínfimo de X se, e somente se
  (a) $x \geq m$, $\forall x \in X$, i.e., m é uma cota inferior para X;
  (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tal que $m \leq x < m + \varepsilon$; i.e., M é a maior cota inferior de X.

Exemplo 1. Para a sequência $x_n = \dfrac{1}{n}$ cujos elementos são $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ..., \dfrac{1}{n}, ...,$ podemos considerar 1 uma cota superior, assim como 30 também é uma cota superior. 0 é uma cota inferior.

Como o conjunto $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos termos dessa sequência assume valor máximo 1, temos que o supremo de X é 1, ou seja, $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = 1$. Vamos mostrar que o ínfimo de X é 0. De fato, basta notar que[1]

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{n} > 0$. Logo, 0 é uma cota inferior para $X = \{x_n = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

[1]Note que os itens (a) e (b) foram adaptados para sequências.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq x_{n_0} < 0 + x_n$. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, tome $n_0 = n + 1$, e então

$$x_{n_0} = \frac{1}{n_0} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = x_n,$$

o que prova (b)

Portanto, $0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Proposição 1.9 *Se (x_n) for uma sequência convergente, então (x_n) é limitada.*

Demonstração. Seja $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Tome $\varepsilon = 1$. Então, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implica em $|x_n - a| < 1$, ou seja,

$$-1 < x_n - a < 1,$$

isto é,

$$a - 1 < x_n < a + 1, \forall n \geq n_0.$$

Defina o conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0 - 1}, a - 1, a + 1\}$. Como este conjunto é finito segue que existem

$$M = \max X \quad \text{e} \quad m = \min X,$$

e, portanto, concluímos que

$$n \leq x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, (x_n) é limitada.

□

Observamos, porém, que o fato de uma sequência ser limitada não implica que ela seja convergente. Por exemplo, a sequência dada por $a_n = (-1)^n$ é limitada, visto que seus termos são sempre -1 e 1, os ímpares e os pares, respectivamente. Portanto, $\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$. A convergência não ocorreu neste caso pois os seus termos oscilam nos seus valores. A garantia da convergência de uma sequência limitada é adicionar a hipótese da sequência, além de limitada, ser também monótona. Isto é provado no Teorema 1.13.

1.4 Propriedades dos limites

As propriedades de limites de sequências são análogas às propriedades de limites de funções, estudadas num curso de Cálculo. Vamos enunciá-las aqui, mas faremos a demonstração de algumas apenas, visto que são poucas as adequações a serem feitas.

Proposição 1.10 *O limite de uma sequência, se existir, é único.*

Demonstração. Por absurdo, seja (x_n) sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, com $a \neq b$.
Assim, tome $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} > 0$.
Disso, de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainda, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Tomando $\widetilde{n} = \max\{n_0, n_1\}$, segue que valem $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|x_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Disso, $\forall n \geq \tilde{n}$, temos

$$|b-a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{2}. \quad \text{(Absurdo!)}$$

Portanto, $a = b$.

□

Proposição 1.11 *(Propriedades aritméticas dos limites de sequências) Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências tais que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, então*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, *desde que* $b \neq 0$.

Demonstração. Faremos as provas de (i) e (iii) e deixamos as demais para o autor.

(i) Dado $\varepsilon > 0$.
Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Como $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Tomando $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\} > 0$ temos que, $\forall n \geq \tilde{n}$ valem as duas desigualdades acima e daí

$$|(x_n - y_n) - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, para $\varepsilon > 0$ determinamos $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq \tilde{n} \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon,$$

isto é, vale (i).

(iii) Primeiramente, como existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, segue que (x_n) é limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, segue que existem n_0 e n_1 naturais tais que

- para todo $n \geq n_0$, implica em $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}$,
- para todo $n \geq n_1$, implica em $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$,

Assim, tome $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\}$. Disso, segue que $\forall n \geq \tilde{n}$, valem ambas as desigualdades acima. Dessa forma, avaliando $|x_n y_n - ab|$, vamos obter

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| =$$

$$= |(x_n y_n - x_n b) + (x_n b - ab)| \leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| \leq$$

$$< M \cdot |y_n - b| + (|b| + 1) \cdot |x_n - a| <$$

$$< M \frac{\varepsilon}{2M} + (|b| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} = \varepsilon,$$

para todo $n \geq \tilde{n}$, o que prova (iii)

$\square$

Exercícios

1. Prove que cada limite a seguir existe, encontrando um $\varepsilon > 0$ e um $n_0 \in \mathbb{N}$ adequados.

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{3-5n} = -\dfrac{2}{5}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3n-1} = \dfrac{1}{3}$

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$ (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-4n}{4n-7} = -1$

2. Prove o seguinte teorema, versão para sequências do Teorema do Sanduíche:
   Teorema. *Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.*

3. Utilize o teorema anterior para provar que $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$.

4. Sendo $a, b \geq 0$, mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

1.5 Sequências monótonas

Definição 1.12 Dizemos que uma sequência (a_n) é

(i) *crescente*, se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n;

(ii) *decrescente*, se $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n.

Chamamos de *monótona* uma sequência que seja crescente ou decrescente.
Se $a_n < a_{n+1}$ a sequência é chamada de *estritamente crescente* e se $a_n > a_{n+1}$ a sequência é chamada de *estritamente decrescente*.

Exemplo. Determine se a sequência (x_n) dada por $x_n = \frac{n}{2n+1}$ é crescente, decrescente ou não monótona.

Solução. Sabemos que os quatro primeiros elementos desta sequência são $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$ o que nos leva a considerar que a sequência pode ser crescente.

Assim, temos:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{2n^2+2n+n+1-2n^2-3n}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0,$$

ou seja, obtemos

$$x_{n+1} > x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

mostrando que a sequência (x_n) é estritamente crescente.

Aproveitando este exemplo, examinemos o supremo e o ínfimo de (x_n), caso existam. Temos que (x_n) é crescente e que $x_n = \frac{n}{2n+1} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, temos que 0 é uma cota inferior para (x_n). Além disso, como (x_n) é crescente, segue que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = \min_{n\in\mathbb{N}} x_n = x_1 = \frac{1}{3}.$$

Afirmamos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \dfrac{1}{2}$. De fato, temos que

(a) $x_n = \dfrac{n}{2n+1} \leq \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Logo, $\frac{1}{2}$ é uma cota superior para os x_n.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2} - x_n < x_{n_0} \leq \dfrac{1}{2}$.

De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, tomando $n_0 = n+1$, teremos

$$\frac{1}{2} - x_n = \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2(2n+1)} \leq \frac{n_0}{2(2n+1)} = \frac{n_0}{2(n+n+1)} = \frac{n_0}{2(n+n_0)},$$

e como $n + n_0 \geq n_0 + 1$, temos $\frac{1}{n+n_0} \leq \frac{1}{n_0+1}$, e assim,

$$\frac{1}{2} - x_n \leq \frac{n_0}{2(n+n_0)} \leq \frac{n_0}{2(n_0+1)} = \frac{n_0}{2n_0+2} < \frac{n_0}{2n_0+1} = x_{n_0},$$

como queríamos mostrar.

Portanto, por (a) e (b) segue que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \dfrac{1}{2}$.

O próximo resultado facilitará enormemente esta avaliação.

Teorema 1.13 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência monótona e limitada. Sem perda de generalidade, suponhamos que tal sequência seja crescente, i.e., $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como (x_n) é limitada, em particular, é limitada superiormente. Seja $A \in \mathbb{R}$ uma cota superior para (x_n), i.e., $x_n \leq A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Defina o conjunto de todos os termos da sequência por $X = \{x_n \ : n \in \mathbb{N}\}$. Obviamente $X \neq \emptyset$ pois, por exemplo, $x_1 \in X$.

Então, X é limitado superiormente por A. Logo, existe uma menor cota superior, à qual denotaremos por L, ou seja, existe $L = \sup X$.

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. De fato, tome $\varepsilon > 0$. Como L é cota superior para X segue que $x_n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Além disso, como $L - \varepsilon < L = \sup X$, segue que $L - \varepsilon$ não é cota superior para X. Portanto, segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < x_{n_0}$.

E, como (x_n) é crescente, temos que

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < L,$$

ou seja,

$$L - \varepsilon < x_n < L < l + \varepsilon,$$

i.e.,

$$|x_n - L| < \varepsilon,$$

provando que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

$\square$

Exemplo 1. Voltando ao exemplo anterior ao Teorema acima, como $x_n = \frac{n}{2n+1}$ é estritamente crescente e limitada superiormente por 1, por exemplo, segue que tal sequência é convergente, e pela prova do Teorema acima, temos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 2. Considere a sequência (b_n) dada por

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Afirmamos que esta sequência é convergente. De fato, precisamos mostrar que:

(i) (b_n) *é monótona (de fato, estritamente crescente).* Realmente, basta notar que

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n,$$

e, portanto, monótona.

(ii) (b_n) *é limitada superiormente por 3, i.e.,* $b_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
De fato,

$$b_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!} < 1+1+\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right],$$

e como entre colchetes temos a soma de $n-1$ termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, pela fórmula da soma dos $k-1$ primeiros termos de uma P.G. de razão q é dada por

$$S_{k-1} = \frac{a_1(q^{k-1}-1)}{q-1} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^{k-1}}{1-q},$$

teremos

$$b_n = 1+1+\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right] = 2+\left[\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= 2+1-\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

(iii) (b_n) *é limitada inferiormente por* 2. De fato, basta notar que

$$b_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!} < 1+1 = 2.$$

Portanto, concluímos que $2 < b_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e que (b_n) é monótona. Portanto, pelo Teorema 1.13 segue que existe o limite da sequência (b_n), e denotaremos por

$$e = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Exemplo 3. Seja (a_n) a sequência definida por

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Afirmação 1. *(a_n) é estritamente crescente.*

Vamos mostrar que $a_{n+1} > a_n$, o que equivale mostrar que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Note que

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n^n}.$$

Assim,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{(n+2)^n(n+2)n^n}{(n+1)^{2n}(n+1)} =$$

$$= \frac{[(n+2)n]^n\,(n+2)}{[(n+1)^2]^n\,(n+1)} = \frac{(n^2+2n)^n}{(n^2+2n+1)^n} \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Aplicando a desigualdade de Bernoulli[2] $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \geq -1$ (no caso, tomando $x = -\frac{1}{n^2+2n+1} \geq -1$), vamos obter

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

[2]Esta desigualdade é vista em cursos de Análise Real e pode ser mostrada facilmente por Indução Matemática. Fica como exercício.

Afirmação 2. $a_n < b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $\forall n \geq 2$.

De fato, abrindo a soma com o desenvolvimento binomial para a_n, obtemos

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1)^{n-j} \left(\frac{1}{n}\right)^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} =$$

$$= \binom{n}{0} \frac{1}{n^0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n^1} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + ... + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n!}{n!(0!)}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + ... + \frac{1}{n!}\frac{n!}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + ... + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n-1)!}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ...$$

$$... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) ... \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Como cada multiplicador de cada fator $\frac{1}{k!}$ é menor do que 1, obtemos a estimativa

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ...$$

$$... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) ... \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} = b_n < 3.$$

Logo, temos que

$$a_n < b_n < 3, \forall n,$$

e como (a_n) é crescente e limitada superiormente por 3, segue pelo Teorema 1.13 que

$$\exists\, L = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Ainda, como $a_n < b_n$, $\forall n$, pela passagem ao limite, teremos

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n \leq \sup b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e,$$

ou seja,

$$L \leq e. \tag{1.1}$$

Mostremos que também vale a desigualdade contrária. Para k fixado, $\forall n \geq k$, temos, desprezando após o k-ésimo aditivo da expansão binomial para a_n:

$$a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ...$$
$$... + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Com k fixado, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$L \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{k!} = b_k,$$

ou seja,

$$L \geq b_k, \forall k \in \mathbb{N} \text{ fixado},$$

então pela passagem ao limite, vem

$$L \geq \lim_{k\to\infty} b_k = e,$$

ou seja,

$$L \geq e. \tag{1.2}$$

Assim, por (1.1) e (1.2) segue que $L = e$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

onde a constante $2 < e < 3$ é chamada de *número de Euler*. Em cursos de Análise se prova que $e \approx 2,71828...$ é irracional.

Vejamos outro exemplo de aplicação do Teorema 1.13.

Exemplo 4. Qual o valor de $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}$, se existir?

Solução. Defina a sequência (x_n) recursivamente por

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \end{cases}$$

Assim, temos que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}$, se o limite existir.

Afirmação 1. *A sequência (x_n) é crescente, i.e., $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

A prova dessa afirmação é feita por indução sobre o índice n.

(i) Quando $n = 1$ temos $x_1 = \sqrt{2}$ e

$$x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1.$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que vale a desigualdade

$$x_k \leq x_{k+1}, \tag{1.3}$$

para um certo índice k. Precisamos mostrar que vale para o índice $k+1$, ou seja, que $x_{k+1} \leq x_{k+2}$. De fato, somando 2 em (1.3), vem

$$2 + x_k \leq 2 + x_{k+1},$$

o que, extraíndo a raiz quadrada, obtemos

$$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} \leq \sqrt{2 + x_{k+1}} = x_{k+2}.$$

Logo, por (i) e (ii) segue que (x_n) é crescente.

Afirmação. *A sequência (x_n) é limitada superiormente.*

De fato, mostraremos que $x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Faremos a prova por indução sobre o índice n.

(i) Quando $n = 1$, temos

$$x_1 = \sqrt{2} \leq 2.$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que $x_k \leq 2$ para um certo índice k. Precisamos mostrar que $x_{k+1} \leq 2$. De fato,

$$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$$

Logo, por (i) e (ii) segue a Afirmação 2.

Assim, pelo Teorema 1.13, como a sequência (x_n) é crescente [Afirmação 1] e limitada superiormente [Afirmação 2], segue que existe o limite $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Logo, pela definição recursiva da sequência (x_n),

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n},$$

passando o limite, obtemos

$$L = \sqrt{2 + L},$$

ou seja, obtemos a equação

$$L^2 - L - 2 = 0,$$

que fornece $L = 2$ e $L = -1$, e como $x_n > 0$, para todo n, segue que vale $L = 2$, ou seja, obtemos

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}} = 2.$$

1.6 Dinâmica das convergências

Considere a sequência (x_n) definida recursivamente por

$$x_1 = \sqrt{2} \ \text{ e } \ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n},$$

à qual mostramos acima convergir para 2.

Escreva $f(x_n) = x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, onde $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \sqrt{2 + x}.$$

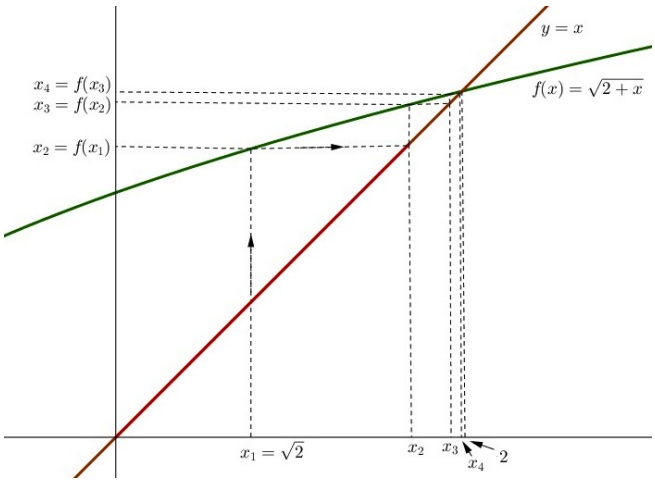
Assim, temos

- $x_1 = \sqrt{2}$,
- $x_2 = f(x_1) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$,
- $x_3 = f(x_2) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$,
- etc.

Como vimos na seção anterior, a sequência (x_n) é crescente e limitada. A função f acima definida também é crescente. Para ver isso basta verificar que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 + x}} > 0, \ \forall x \in (0, +\infty).$$

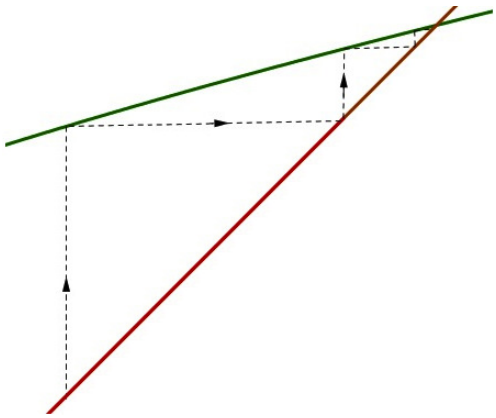
Montando os gráficos de f e da reta bissetriz dos quadrantes ímpares $y = x$ num mesmo plano cartesiano, podemos visualizar a "dinâmica" da convergência:



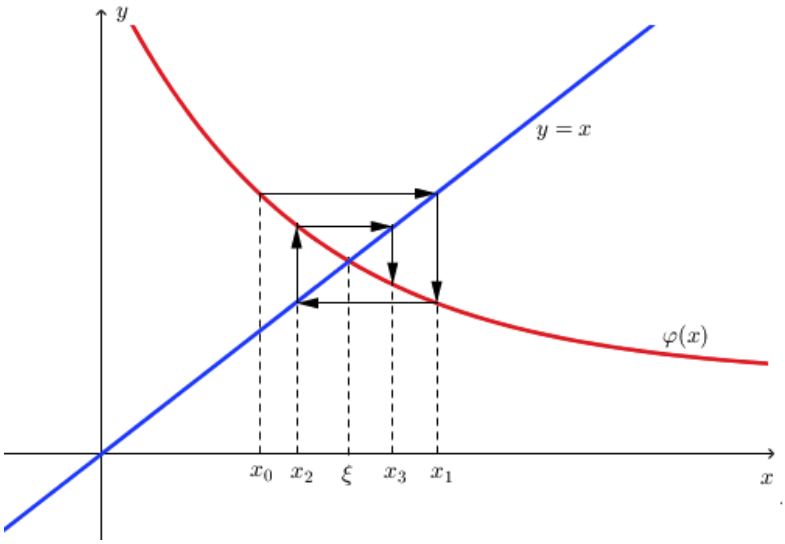
Observe que a reta $y = x$ serve apenas para projetar a imagem $f(x_n) = x_{n+1}$ no eixo horizontal, e a partir daí determinar

$$f(x_{n+2}) = \sqrt{2 + x_{n+1}}, \quad \text{etc.}$$

Note que, sendo f crescente a dinâmica vai produzindo uma "escada" que se aproxima do limite de x_n quando $n \to \infty$ (a intersecção $y = f(x)$ e $y = x$).



Se a f que determina os termos da sequência for decrescente a dinâmica nos fornecerá duas subsequências, uma crescente e outra decrescente, ambas convergindo para o limite de x_n (ou seja, a sequência (x_n) não será monótona):



Vejamos um exemplo para ilustrar este caso.
Vamos construir uma sequência $(x_n)_n$ que converge para $\sqrt{2}$, do seguinte modo:

escreva

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}},$$

e assim

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}}.$$

Isso nos motiva perguntar: Será que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \ldots}}}} \ ?$$

Esta representação para $\sqrt{2}$ é chamada de *fração contínua*.

Tal representação nos permite definir a sequência (x_n) onde

$$x_1 = 1; \ x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \ x_3 = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2}} = \frac{7}{5}; \ \text{etc.}$$

Recursivamente, definimos a sequência (x_n) pondo

$$x_1 = 1 \ \text{ e } \ x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}.$$

Vamos mostrar que $x_n \to \sqrt{2}$. Defina $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

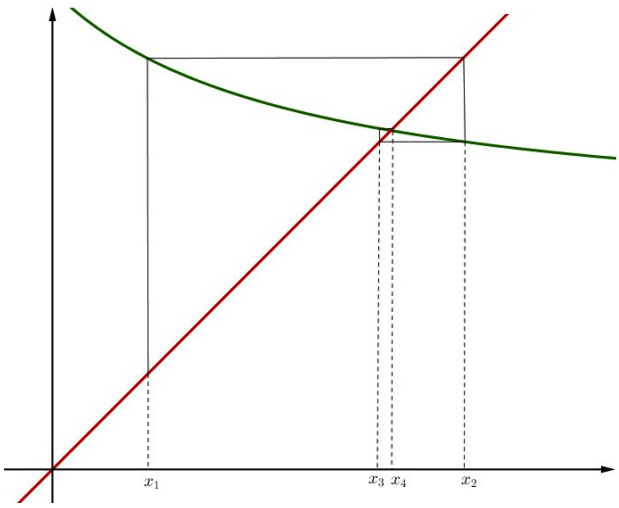
$$f(x) = 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x+2}{x+1}.$$

Como

$$f'(x) = \frac{(x+1)\cdot 1 - (x+2)\cdot 1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}, \ \forall x \in (0, +\infty),$$

segue que f é decrescente em $(0, +\infty)$.

Logo, a sequência (x_n) não é monótona. Veja a ilustração da dinâmica da convergência:



Pela ilustração acima, conjecturamos que

$$x_1 < x_3 < x_5 < ... < x_6 < x_4 < x_2.$$

Vamos considerar duas subsequências da sequência (x_n): a subsequência (x_{2n-1}) dos termos ímpares dada por

$$x_{2n+1} = f(x_{2n}) = f(f(x_{2n-1})) = (f \circ f)(x_{2n-1});$$

e a subsequência (x_{2n}) dos termos pares, dada por

$$x_{2n} = f(x_{2n-1}) = f(f(x_{2n-2})) = (f \circ f)(x_{2n-2}).$$

Defina $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{3x+4}{2x+3}.$$

Assim, temos que

$$g'(x) = \frac{(2x+3) \cdot 3 - (3x+4) \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{1}{(2x+3)^2}, \forall x \in (0, +\infty).$$

Logo, g é crescente.

Afirmação 1. *A subsequência* (x_{2n-1}) *dos termos ímpares é crescente.*

Ou seja, vamos mostrar que $x_{2n-1} < x_{2n+1}$, $\forall \in \mathbb{N}$. Tal prova será feita por indução sobre n.

(i) Para $n = 1$, temos
$$x_1 = 1 < \frac{7}{5} = x_3.$$
Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que $x_{2k-1} < x_{2x+1}$ para um certo índice k. Precisamos mostrar que $x_{2k+1} < x_{2k+3}$. De fato, como g é crescente,
$$x_{2k-1} < x_{2k+1} \Rightarrow g(x_{2k-1}) < g(x_{2k+1}) \Rightarrow x_{2k+1} < x_{2k+3}.$$

Logo, por (i) e (ii) segue a prova da Afirmação 1.

Afirmação 2. *A subsequência* (x_{2n}) *dos termos pares é decrescente.*

Ou seja, vamos mostrar que $x_{2n} > x_{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Faremos a prova por indução.

(i) Para $n = 1$ temos
$$x_2 = \frac{3}{2} = \frac{18}{12} > \frac{17}{12} = x_4.$$
Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que $x_{2k} > x_{2k+2}$ para um certo índice k. Precisamos mostrar que vale para o índice $k+1$, ou seja, precisamos mostrar que $x_{2k+2} > x_{k+4}$. De fato, como g é crescente,
$$x_{2k} > x_{2k+2} \Rightarrow g(x_{2k}) > g(x_{2k+2}) \Rightarrow x_{2k+2} > x_{2k+4}.$$

Logo, por (i) e (ii) segue a prova da Afirmação 2.

Precisamos mostrar agora que as subsequências (x_{2n}) e (x_{2n-1}) são limitadas, no caso, como (x_{2n}) é decrescente, precisamos mostrar que ela é limitada inferiormente, e como (x_{2n-1}) é crescente, precisamos mostrar que é limitada superiormente.

Afirmação 3. *A subsequência (x_{2n}) é limitada inferiormente.*

De fato, como $x_n > 0$, $\forall n$, temos que 0 é uma cota inferior para (x_n), logo, em particular para (x_{2n}).

Afirmação 4. *A subsequência (x_{2n-1}) dos termos ímpares é limitada superiormente.*

De fato, vamos mostrar que $x_{2n-1} < x_2$. Faremos a prova por indução.

(i) Para $n = 1$, temos

$$x_1 = 1 < \frac{3}{2} = x_2.$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que a desigualdade seja verdadeira para um certo índice $n = k$, i.e., que

$$x_{2k-1} < x_2.$$

Precismos mostrar que $x_{2k+1} < x_2$. Como g é crescente e lembrando que (x_{2n}) é decrescente, obtemos

$$x_{2k-1} < x_2 \Rightarrow g(x_{2k-1}) < g(x_2) \Rightarrow x_{2k+1} < x_4 < x_2.$$

Logo, por (i) e (ii) segue a Afirmação 4.

Portanto, com base nas Afirmações 1 e 4 segue que existe $L_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{2n-1} \nearrow L_1,$$

i.e., a subsequência dos termos ímpares é crescente e convergente para L_1; e de acordo com as Afirmações 2 e 3 segue que existe $L_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{2n} \searrow L_2,$$

i.e., a subsequência dos termos pares é decrescente e convergente para L_2.

Mostraremos que $L_1 = L_2$. Como

$$x_{2n+1} = g(x_{2n-1}) = \frac{3x_{2n-1} + 4}{2x_{2n-1} + 2},$$

passando o limite, obtemos

$$L_1 = \frac{3L_1 + 4}{2L_1 + 3},$$

donde segue que $L_1 = \sqrt{2}$.

Do mesmo modo, como

$$x_{2n+2} = g(x_{2n}) = \frac{3x_{2n} + 4}{2x_{2n} + 2},$$

passando o limite, obtemos

$$L_2 = \frac{3L_2 + 4}{2L_2 + 3},$$

donde segue que $L_2 = \sqrt{2}$.

Conclusão: $L_1 = L_2 = \sqrt{2}$, ou seja, a sequência (x_n) converge para $\sqrt{2}$, pois as duas subsequências (x_{2n}) e (x_{2n-1}) convergem para $\sqrt{2}$.

1.7 O Teorema de Bolzano-Weierstrass

Nesta seção apresentaremos um importante Teorema do estudo de sequências, conhecido por Teorema de Bolzano-Weierstrass. Antes, porém, apresentaremos um Teorema preliminar.

Teorema 1.14 *(Teorema dos intervalos fechados encaixados) Seja $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de intervalos fechados tais que $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n$, $\forall n$, ou seja, $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.*

Demonstração. Seja $I_n = [a_n, b_n]$ uma sequência de intervalos fechados e encaixados, ou seja, $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n$.

Seja $X = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Observe que $X \neq \emptyset$ pois $a_1 \in X$.

Afirmamos que X é limitado superiormente por b_1. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$. Como $[a_n, b_n] \subset [a_1, b_1]$, segue que $a_n \leq b_n \leq b_1$.

Portanto, sendo X limitado superiormente, temos que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c = \sup X$.

Afirmamos também que $c \in [a_n, b_n], \forall n$. De fato, sendo $c = \sup X$, temos que c é cota superior do conjunto X e então

$$a_n \leq c, \forall n. \tag{1.4}$$

Afirmamos também que $\forall n$, b_n é uma cota superior de X. Realmente, seja $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\forall m \geq n$ temos $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$. Logo $a_m \leq b_m \leq b_n$, ou seja, $a_m \leq b_n$, $\forall m \geq n$.

Mas $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_m \leq b_n$, donde segue que $a_m \leq b_n$, $\forall m$.

Logo, b_n é uma cota superior de X e daí temos que $b_n \geq \sup X = c$, $\forall n$. Portanto,

$$c \leq b_n, \forall n. \tag{1.5}$$

Juntando (1.4) e (1.5) segue o resultado.

□

Por fim, apresentamos o importante teorema sobre sequências.

Teorema 1.15 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada possui subsequência convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada. Então $\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, a_1 cota inferior e a_2 cota superior de (x_n).

Seja $I_1 = [a_1, b_1]$. Temos que $x_n \in I_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dividimos I_1 em dois sub-intervalos pelo ponto médio. Escolhemos $I_2 = [a_2, b_2]$ uma das metades tal que $x_n \in I_2$, para uma infinidade de índices n. Após isto, dividimos I_2 em dois sub-intervalos ao meio. Tomamos $I_3 = [a_3, b_3]$ uma das metades tal que $x_n \in I_3$ para uma infinidade de índices n. Seguimos estas divisões recursivamente, sempre tomando-se aquele subintervalo que contém uma infinidade de índices n (se em alguma etapa de divisão em dois sub-intervalos ambos possuírem uma infinidade de termos de (x_n), então podemos tomar qualquer um deles para fazer a nova divisão).

Obtemos desta forma uma sequência de intervalos fechados encaixados $I_1, I_2, ...$ onde

$$... \subset I_k \subset I_{k-1} \subset ... \subset I_2 \subset I_1$$

tais que

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = I_{k+1} \subset I_k = [a_k, b_k].$$

Sendo ℓ_{I_j} é o comprimento do j-ésimo subintervalo temos

$$\ell_{I_{k+1}} = \frac{1}{2}\ell_{I_k} \Leftrightarrow b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2},\ x_n \in I_k,$$

para uma quantidade infinita de índices n.

Pelo Teorema dos intervalos fechados encaixados temos que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_k$, $\forall k$.
Vamos mostrar que existe uma subsequência de (x_n) que tende para o número real c. Para isto, precisamos escolher índices

$$n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_j < n_{j+1} < ...,$$

com $x_{n_j} \to c$.

Note que

- $a_n \in I_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, escolhemos qualquer n_1. Seja $n_1 = 1$. Temos então que $a_{n_1} = a_1 \in I_1$.
- $a_n \in I_2$, para uma infinidade de índices n. Escolhemos $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \in I_2$.
- $a_n \in I_3$, para uma infinidade de índices n. Escolhemos $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} \in I_3$.

$$\vdots$$

Seguindo estes raciocínios, obtemos $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$ de tal forma que $x_{n_k} \in I_k, \forall k$. Temos então uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n).

Note ainda que $x_{n_k} \in I_k$ e $c \in I_k$, isto implica que

$$|c - x_{n_k}| \leq \ell_{I_k} = b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = ... = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \to 0$$

quando $k \to +\infty$.

Portanto, (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n) tal que $x_{n_k} \to c$.

$\square$

Uma aplicação importante do Teorema de Bolzano-Weierstrass é ajudar na demonstração do Teorema do Valor Extremo estudado nos cursos de Cálculo, cuja demonstração é omitida por faltar o estudo de sequências:

Teorema do Valor Extremo. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então f possui um valor máximo e um valor mínimo em $[a, b]$.*

Demonstração. Mostraremos apenas que f assume valor máximo em $[a, b]$, visto que a prova da outra parte é feita analogamente.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostremos primeiramente que f é limitada superiormente. De fato, se por absurdo f não for limitada superiormente, então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) > n$.

Como $x_n \in [a,b], \forall n$, temos que a sequência (x_n) é limitada. Então, pelo teorema de Bolzano-Weirestrass, existe uma subsequência x_{n_k} convergente, digamos $x_{n_k} \to c$.

Portanto,

$$a \leq x_{n_k} \leq b, \forall n_k \Rightarrow a \leq c \leq b \Rightarrow c \in [a,b].$$

Assim, temos que

$$x_{n_k} \to c \in [a,b] \text{ e } f \text{ é contínua em } c,$$

donde segue, por continuidade, que

$$f(x_{n_k}) \to f(c). \tag{1.6}$$

Mas $f(x_n) \to +\infty$, pois $f(x_n) > n$, $\forall n$. Em particular, $f(x_{n_k}) > n_k$, donde segue que $f(x_{n_k}) \to +\infty$, o que entra em contradição com (1.6). Absurdo!

Logo, f é limitada superiormente.

Por fim, mostremos que f assume um valor máximo em $[a,b]$. Seja $X = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ o conjunto imagem de f.

Como mostramos acima que f é limitada superiormente, segue que o conjunto o X das imagens possui um supremo.

Seja então $M = \sup X = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Precisamos mostrar que $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = M$.

Pela definição de supremo temos que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a,b]$ tal que $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leq M$. Então, pelo Teorema do Sanduíche temos que $f(x_n) \to M$.

Como $x_n \in [a,b]$ temos que a sequência (x_n) é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weirestrass, existe uma subsequência (x_{n_k}) convergente para um

limite ℓ, i.e.,

$$x_{n_k} \to \ell,\ \ell \in [a, b].$$

Por continuidade de f segue que $f(x_{n_k}) \to f(\ell)$.

Mas $f(x_n) \to M$.

Portanto, pela unicidade do limite segue que $f(\ell) = M$, ou seja, f assume um valor máximo em $[a, b]$.

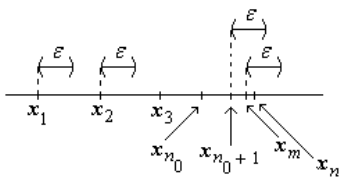
□

1.8 Sequência de Cauchy

Até o presente momento de nosso estudo de sequências vimos por exemplo, que para provar que uma sequência é convergente precisávamos, a priori, conhecer o candidato a limite. Porém, nem sempre isso é possível. Nesta seção vamos apresentar um outro critério mais interessante para mostrar se uma sequência é convergente sem precisar saber para quanto ela converge. Para isto vamos definir *sequência de Cauchy*.

Definição 1.16 Dizemos que uma sequência (x_n) é *de Cauchy* se, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer índices $m, n \geq n_0$ implique em $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

A ideia geométrica desta definição é bastante simples: uma sequência (x_n) chama-se de Cauchy se, dado um raio $\varepsilon > 0$, existir um índice n_0 tal que a distância entre dois termos quaisquer da sequência, a partir do índice n_0, estarão próximos um do outro a menos de ε.



Observe na ilustração que, fixado um raio $\varepsilon > 0$, temos que a distância entre x_1 e x_2 é maior do que este ε, as distâncias entre x_1 e x_3 e entre x_2 e x_3 também são maiores do que ε, e assim por diante. Porém, a partir de um índice n_0 dois termos quaisquer da referida sequência equidistam entre si a menos de ε.

A proposição a seguir mostra um importante resultado.

Proposição 1.17 *Se uma sequência (x_n) for convergente, então ela é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente e seja a o seu limite. Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Desta forma, tomando $m, n \geq n_0$ temos

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avaliando a distância entre x_m e x_n, temos

$$|x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, mostramos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$, ou seja, (x_n) é uma sequência de Cauchy.

□

Queremos provar que a recíproca da proposição acima também é verdadeira. Porém, precisamos ver primeiramente o Lema abaixo:

Lema 1.18 *Se (x_n) é uma sequência de Cauchy, então ela é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy e tome $\varepsilon = 1$. Então, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$.

Em particular, fixando $n = n_0$ (o que é válido), segue que $\forall m \geq n_0$ temos

$$|x_m - x_{n_0}| < 1 \Leftrightarrow -1 \leq x_m - x_{n_0} < 1 \Leftrightarrow x_{n_0} - 1 < x_m < x_{n_0} + 1.$$

Portanto, $x_m \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1), \forall m \geq n_0$, ou seja, a partir do índice n_0 todos os termos da sequência (x_n) ficam no intervalo $(x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$.

Resta observar a quantidade finita de termos que ficaram fora deste intervalo, ou seja, os termos x_1, x_2, ..., x_{n_0-1} e os extremos do intervalo acima $x_{n_0} - 1$ e $x_{n_0} + 1$. Para isto, defina o conjunto

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}.$$

Como X é um conjunto finito podemos destacar o menor e o maior elemento. Assim, tomamos $a = \min X$ e $b = \max X$. Desta forma, conseguimos encontrar um intervalo $[a, b]$ tal que $x_n \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, a sequência (x_n) de Cauchy é limitada.

□

Proposição 1.19 *Se (x_n) é uma sequência de Cauchy, então ela é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Pelo Lema anterior segue que (x_n) é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência x_{n_k} convergente, digamos, $x_{n_k} \to a$.

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

De fato, primeiramente, sendo (x_n) de Cauchy, temos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainda, como $x_{n_k} \to a$, temos que, para o mesmo $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n_k \geq n_1 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tome $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\}$. Então, $\forall n \geq \tilde{n}$, escolhendo um índice $n_k > \tilde{n}$, temos

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) - (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que prova que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

□

Teorema 1.20 *Seja (x_n) uma sequência e seja $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 < \lambda < 1$, tal que*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}|, \forall n \geq 2.$$

Então, a sequência (x_n) é convergente.

Demonstração. Vamos mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente.

Para $m > n \in \mathbb{N}$, tome $p > 0$ tal que $m = n + p$. Assim,

$$|x_m - x_n| = |x_{n+p} - x_n| =$$

$$= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + x_{n+p-2} + ... + x_{n-1} - x_n| \leq$$

$$\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + ... + |x_{n-1} - x_n|,$$

ou seja, obtemos

$$|x_m - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + ... + |x_{n-1} - x_n|. \quad (1.7)$$

Pela hipótese do Teorema segue que quaisquer dois termos consecutivos x_k e x_{k-1} da sequência (x_n) podem ser estimados por

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \lambda|x_{k-1} - x_{k-2}| \leq \lambda^2|x_{k-2} - x_{k-3}| \leq$$

$$\leq \lambda^3|x_{k-3} - x_{k-4}| \leq \ ... \ \leq \lambda^{k-2}|x_2 - x_1|.$$

Assim, temos que (1.7) fica majorado por

$$|x_m - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + ... + |x_{n-1} - x_n| \leq$$

$$\leq \lambda^{n+p-2}|x_2 - x_1| + \lambda^{n+p-3}|x_2 - x_1| + \lambda^{n+p-4}|x_2 - x_1| + ... + \lambda^{n-1}|x_2 - x_1| =$$

$$= \left(\lambda^{n+p-2} + \lambda^{n+p-3} + \lambda^{n+p-4} + \lambda^{n-1}\right)|x_2 - x_1|.$$

O aditivo entre parênteses é uma soma de uma progressão geométrica de $n + p - 2 - (n - 1) = p - 1$ termos de razão λ^{-1}, e sabendo que a soma S_k de k termos de uma P.G. de razão q é dada por

$$S_k = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^k}{1-q},$$

segue que

$$\lambda^{n+p-2} + \lambda^{n+p-3} + \lambda^{n+p-4} + \lambda^{n-1} = \frac{\lambda^{n+p-2}}{1-\lambda^{-1}} - \frac{\lambda^{n+p-2}(\lambda^{-1})^{p-1}}{1-\lambda^{-1}} =$$

$$= \frac{\lambda^{n+p-1}}{\lambda - 1} - \frac{\lambda^n}{\lambda - 1},$$

e daí

$$|x_m - x_n| \leq \left(\lambda^{n+p-2} + \lambda^{n+p-3} + \lambda^{n+p-4} + \lambda^{n-1}\right)|x_2 - x_1| =$$

$$= \left(\frac{\lambda^{n+p-1}}{\lambda - 1} - \frac{\lambda^n}{\lambda - 1}\right)|x_2 - x_1| = \left(\frac{\lambda^n}{1 - \lambda} - \frac{\lambda^{n+p-1}}{1 - \lambda}\right)|x_2 - x_1| \leq$$

$$\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}|x_2 - x_1|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda^{n_0} < \frac{(1 - \lambda)\varepsilon}{|x_2 - x_1|}.$$

Então, $\forall n \geq n_0$, sendo $0 < \lambda < 1$, obtemos

$$\lambda^n \leq \lambda^{n_0}.$$

Logo,

$$\frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \leq \frac{\lambda^{n_0}}{1 - \lambda},$$

e, portanto, $\forall m, n \geq n_0$, vale

$$|x_m - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}|x_2 - x_1| \leq \frac{\lambda^{n_0}}{1 - \lambda}|x_2 - x_1| < \frac{(1 - \lambda)\varepsilon}{|x_2 - x_1|} \cdot \frac{|x_2 - x_1|}{1 - \lambda} = \varepsilon,$$

ou seja, (x_n) é uma sequência de Cauchy, e então, pela Proposição 1.19 ela é convergente.

□

1.9 Ponto aderente

Como já sabemos, a sequência (x_n) dada por $x_n = (-1)^n$, embora seja limitada, ela não é convergente, pois não é monótona. No entanto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, como tal sequência é limitada, podemos extrair uma subsequência convergente. De fato, neste exemplo, é possível destacar duas subsequências convergentes, a subsequência dos termos pares (x_{2n}), dada por $x_{2n} = 1$, ou seja,

$$(x_{2n}) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, ...),$$

que converge para 1; e a subsequência dos termos ímpares (x_{2n-1}) dada por $x_{2n-1} = -1$, ou seja,

$$(x_{2n-1}) = (-1, -1, -1, -1, ...)$$

que converge para -1. Tais valores aos quais as subsequências convergem são chamados de *pontos aderentes*. Ou seja, temos a definição que segue.

Definição 1.21 Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que um ponto $c \in \mathbb{R}$ é um *ponto aderente* para a sequência (x_n) se existir uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to c$.

Na introdução dada acima temos que 1 e -1 são pontos aderentes da sequência $x_n = (-1)^n$.

Proposição 1.22 *Seja (x_n) uma sequência e $c \in \mathbb{R}$. Então, o ponto c é ponto aderente de (x_n) se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto*

$$\{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)\}$$

é infinito.

Demonstração. Suponha que $c \in \mathbb{R}$ seja ponto aderente de (x_n). Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \to c$.

Tome $\varepsilon > 0$. Então, pela definição de limite segue que existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n_k \geq n_0$, implica em $|x_{n_k} - c| < \varepsilon$, ou seja, implica em

$$c - \varepsilon < x_{n_k} < c + \varepsilon, \ \forall n_k \geq n_0,$$

e como tal desigualdade, pela definição de limite, vale para uma infinidade de índices n_k, desde que $n_k \geq n_0$, concluímos que o conjunto

$$\{n_k \,:\, x_{n_k} \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)\}$$

é infinito.

Reciprocamente, suponha que $\forall \varepsilon > 0$, $x_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ para uma infinidade de índices n. Vamos consruir uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to c$. De fato, como a contenção acima vale para todo $\varepsilon > 0$, então:

- Para $\varepsilon = 1 > 0$, escolha um índice n_1 tal que $x_{n_1} \in (c-1, c+1)$.
- Para $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, o conjunto $\{c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2}\}$ é infinito. Assim, escolha um índice $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in (c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2})$.
- Para $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$, o conjunto $\{c - \frac{1}{3}, c + \frac{1}{3}\}$ é infinito. Assim, escolha um índice $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \in (c - \frac{1}{3}, c + \frac{1}{3})$.

$$\vdots$$

- Segue a construção por indução: para $\varepsilon = \frac{1}{k} > 0$, suponha escolhido o índice $n_k > n_{k-1}$, tal que $x_{n_k} \in (x - \frac{1}{k}, c + \frac{1}{k})$ para uma infinidade de índices; para $\varepsilon = \frac{1}{k+1} > 0$, escolhe-se o índice $n_{k+1} > n_k$ tal que o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : (c - \frac{1}{k+1}, c + \frac{1}{k+1})\}$ é infinito.

Assim, por indução construímos uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n)tal que

$$|x_{n_k} - c| < \frac{1}{k},$$

o que, fazendo $k \to \infty$ concluímos que $x_{n_k} \to c$.

$\square$

1.10 Limites infinitos

Nesta seção definiremos o conceito de limite infinito.

Definição 1.23 Seja (x_n) uma sequência. Então:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \overset{\text{Def.}}{\iff} \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n > A.$$

Por exemplo, considere a sequência (x_n) dada por $x_n = n^2$. Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. De fato, dado $A > 0$, precisamos achar um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal

que, para qualquer $n \geq n_0$, se tenha $x_n > A$. Para isto, basta tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \sqrt{A}$. Assim, $\forall n \geq n_0$, teremos

$$x_n = n^2 \geq n_0^2 > \left(\sqrt{A}\right)^2 = A,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$$

Também podemos definir $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ como segue:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n < -A.$$

Há várias propriedades aritméticas referentes a limites infinitos, porém não estamos interessados neste curso, mas se o leitor estiver interessado as mesmas podem ser encontradas em livros de Análise na reta.

Capítulo 2

Séries numéricas

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a noção de soma infinita, denominada *série numérica*. Iniciemos com a sua definição.

Definição 2.1 Chama-se *série infinita* a soma da forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

dos termos de uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A série pode ser abreviada usando-se o símbolo de somatório $\sum$. Assim,

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

e a notação $\sum$ deve ser adotada, salvo para séries muito simples.

Na notação

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

a_n chama-se *termo geral da série*.

Nosso objetivo é compreender o significado de tal soma infinita e desenvolver métodos para decidir se uma dada série possui ou não uma soma e, em alguns casos, determinar tal soma.

Toda série infinita $\sum a_n$ está associada à sequência (s_n) das somas parciais definida por

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Portanto,

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ ...,\ s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,\ ...$$

Definição 2.2 A série infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é dita ser *convergente* se a sequência das somas parciais $(s_n)_n$ for convergente; e *divergente* se a sequência das somas parciais for divergente. Se a série for convergente e a sequência das somas parciais (s_n) convergir para S, então S será chamada a soma da série, e escreve-se

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

desde que o limite exista.

Exemplo: Considere a série $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{7}{8} + ... + \dfrac{2^n - 1}{2^n} + ...$ Note que, os termos desta série formam uma sequência convergente, pois $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$. No entanto, não segue a convergência da série.

Neste caso, podemos observar que cada termo da série é pelo menos igual a $\dfrac{1}{2}$ e, consequentemente

$$s_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} = n \cdot \frac{1}{2}.$$

A sequência s_n é monótona, mas não é limitada, e $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. Logo, a série é divergente.

De modo geral, devem-se distinguir as noções de série, sequência dos termos de uma série, e a sequência de somas parciais de uma série. A série é simplesmente um outro modo de descrever-se a sequência das somas parciais; os termos da série descrevem as variações entre uma soma parcial e a soma seguinte.

Exemplo. Para atribuirmos significado, por exemplo, para uma expressão do tipo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ...$$

somamos os termos um a um a partir do início e buscamos um padrão para as somas parciais.

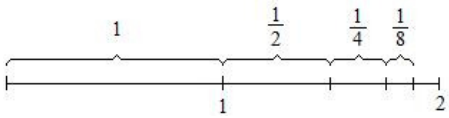
Soma Parcial	Valor	Expressão sugerida para a soma parcial
$s_1 = 1$	1	$2 - 1$
$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$
$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$
$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{15}{8}$	$2 - \frac{1}{8}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$	$\dots$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Realmente existe um padrão. A soma parcial forma uma sequência cujo ene-ésimo termo é

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Esta sequência converge para 2, pois $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2$. Assim, dizemos que a soma infinita $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...$ é igual a 2.

Observe a figura a seguir.



Quando os comprimentos 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... são adicionados um a um, a soma se aproxima de 2.

Você deve estar se perguntando: Podemos adicionar um número infinito de termos um a um? A resposta é: Claro que não! Contudo, podemos ainda definir sua soma como o limite da sequência de somas parciais quando $n\to+\infty$.

Exemplo: Encontre a soma da série[1] $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Solução. Inicialmente procuramos um padrão na sequência das somas parciais que possa levar a uma fórmula para s_n. Neste caso, a chave é a decomposição em frações parciais.

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Assim, podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$s_n=1-\frac{1}{n+1}$$

[1] A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ é chamada série telescópica.

Note que, $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Logo, a série converge, e sua soma é 1.

2.2 Série geométrica

Séries geométricas são da forma

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n,$$

onde $a \in \mathbb{R}$.

Se $a = 1$, a n-ésima soma parcial da série geométrica é $s_n = 1 + 1^1 + 1^2 + ... + 1^n = n + 1$ e será divergente, pois $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Se $a = -1$, a série diverge porque a n-ésima soma parcial oscila entre 1 e 0. Se $|a| \neq 1$, podemos determinar a convergência ou a divergência da série da seguinte maneira:

$$s_n = 1 + a \cdot +a^2 + a^3 + ... + a^n$$

Multiplicando por a, obtemos

$$a \cdot s_n = a + a^2 + a^3 + ... + a^n + a^{n+1}$$

Subtraindo a primeira igualdade da segunda, obtemos

$$a \cdot s_n - s_n = a^{n+1} - 1.$$

Logo, como assumimos $|a| \neq 1$, podemos escrever

$$s_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Se $|a| < 1$ segue que $a^{n+1} \to 0$ e daí

$$s_n \to \frac{1}{1-a},$$

ou seja, concluímos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}; \text{ onde } |a| < 1, \quad \text{i.e., a série converge.}$$

Quando $|a| > 1$ a série será divergente.

2.3 Propriedades das séries

A proposição abaixo estabelece as principais operações entre séries convergentes.

Proposição 2.3 *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *são convergentes com somas* A *e* B *respectivamente, e* k *é uma constante, então*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = A + B$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - b_n) = A - B$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = k \cdot A$

Demonstração. Faremos apenas a demonstração de (i) e deixaremos (ii) e (iii) para o leitor. Sejam (A_n) e (B_n) as sequências das somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente. Ou seja,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_n.$$

Como $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem para A e B, respectivamente, dado $\varepsilon > 0$, temos

- como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$;
- como $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tome $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\}$. Assim, $\forall n \geq \tilde{n}$, valem

$$|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, avaliando a diferença $|(A_n + B_n) - (A + B)|$, obtemos:

$$|(A_n + B_n) - (A + B)| \leq |A_n - A| + |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, segue que

$$\lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = A + B.$$

Por outro lado,

$$A_n + B_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k),$$

e disso,

$$A + B = \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n),$$

o que conclui a prova do item (i).

□

Corolário 2.4 (i) *Quando multiplicamos uma série divergente por uma constante diferente de zero, obtemos uma série também divergente.*
(ii) *Se* $\sum a_n$ *converge e* $\sum b_n$ *diverge, então tanto* $\sum(a_n+b_n)$ *como* $\sum(a_n-b_n)$ *divergem.*

Obs.: Lembre-se de que $\sum(a_n+b_n)$, pode convergir quando tanto $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergem. Por exemplo, $\sum a_n = 1+1+1+...$ e $\sum b_n = (-1)+(-1)+(-1)+...$ divergem, enquanto $\sum(a_n + b_n) = 0 + 0 + 0 + ...$ converge para 0.

Exemplo. Calcule as somas a seguir.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{2^{n-1}}$

Solução. Note que basta usar a Proposição 2.3 e notar que temos operações com séries geométricas:

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{6^{n-1}} =$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{2^{n-1}} = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 4\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 8$$

Proposição 2.5 *(Critério do Termo Geral) Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *for convergente, então* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$,

Demonstração. Fazendo-se S representar a soma da série e $s_n = a_1+a_2+...+a_n$ representar a n-ésima soma parcial, se tomarmos n suficientemente grande, tanto s_n como s_{n-1} estão perto de S, assim a diferença $s_n - s_{n-1} = a_n$, está próxima de zero. Mais formalmente,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = S - S = 0$$

Logo, se a_n não convergir para zero, a série não poderá convergir.

□

Note que esse critério só poderá ser usado para provar divergências. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, a série $\sum a_n$ poderá divergir ou convergir.

Exemplo. Aplicar o teste do n-ésimo termo para verificar se a sequência diverge.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ diverge, pois $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ não existe.

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2$ diverge, pois $n^2 \to +\infty$, quando $n \to +\infty$.

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-1}{4n+5}$ diverge, pois $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{4n+5} = \frac{3}{4} \not\to 0$ quando $n \to +\infty$.

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Note que, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, logo o teste não revela nada. Veremos abaixo que esta série, chamada *harmônica*, diverge. Antes, porém, apresentamos uma importante Proposição.

Proposição 2.6 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *de termos não negativos converge se, e somente se, suas somas parciais são limitadas superiormente.*

Demonstração. Suponha que $\sum a_n$ seja convergente, com $a_n \geq 0$, $\forall n$. Vamos mostrar que a sequência (s_n) das somas parciais da série é limitada superiormente. Seja

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

tal que

$$\exists \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = s > 0,$$

pois $a_n \geq 0$, $\forall n$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$.
Ou seja, $-\varepsilon < s_n - s < \varepsilon$, donde segue que $s_n < s + \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Tome $k = \max\{s + \varepsilon, s_1, s_2, ..., s_{n_0}\} > 0$.

Assim, segue que $s_n \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, encontramos $k > 0$ tal que $s_n \leq k$, $\forall n$, o que mostra que a sequência das somas parciais da série $\sum a_n$ é limitada superiormente por $k > 0$.

Reciprocamente, suponha que a sequência (s_n) das somas parciais de $\sum a_n$ seja limitada superiormente.

Vamos mostrar que $\sum a_n$ converge, onde $a_n \geq 0$, $\forall n$. Por absurdo, suponha que $\sum a_n$ diverge. Isto significa que

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty,$$

ou seja, $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n > M$, $\forall n \geq n_0$.

Mas isso contradiz a hipótese de que (s_n) é limitada superiormente. Absurdo!
Portanto, $\sum a_n$ é convergente.

$\square$

No que segue, mostraremos a divergência da série $\sum \frac{1}{n}$, c.f. mencionado anteriormente.

Exemplo. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$ é chamada *série harmônica*. Esta série é muito importante e, assim como a série geométrica, é muito usada como referência para alguns testes de convergência que veremos adiante. A série harmônica é divergente, mas isto não segue do teste do n-ésimo termo, pois $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Isto ocorre porque não há limitante superior para suas somas parciais, ou seja, a Proposição 2.6 não se cumpre.

De fato, basta observar a soma parcial s_{2^n} onde, separando adequadamente os aditivos como segue, obtemos

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{16}\right)}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + ...$$

$$... + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + ... + \frac{1}{2^n}\right)}_{>2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} = 1 + n \cdot \frac{1}{2} \to \infty$$

Logo, a série harmônica diverge.

Teorema 2.7 *(Critério de Cauchy) Uma série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se,* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $p > n_0$,

$$\left|\sum_{n=n_0}^{p} a_n\right| < \varepsilon.$$

Demonstração. Sabemos que a série $\sum a_n$ converge se, e somente se a sequência das somas parciais (s_n) for convergente. Logo, pelo Critério de Cauchy para sequências, temos que $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0$, implicar em

$$|s_m - s_n| < \varepsilon.$$

No entanto, escrevendo $n = n_0$ e $m = n_0 + p$, onde $p \geq 1$, segue que

$$|\sum_{n=n_0+1}^{n_0+p} a_n| = |a_{n_0+1} + ... + a_{n_0+p}| = |s_{n_0+p} - s_{n_0}| < \varepsilon.$$

□

2.4 Testes de convergência

Dada uma série $\sum a_n$, vamos estudar Teoremas que nos ajudarão a decidir sua convergência ou divergência. Primeiramente vamos estudar séries que não possuem termos negativos. A razão para essa restrição consiste no fato de que as somas parciais dessas séries formam sequências crescentes, e sequências crescentes limitadas superiormente sempre convergem. Para mostrar que uma série sem termos negativos converge, precisamos simplesmente mostrar que suas somas parciais são limitadas superiormente.

2.4.1 Teste da comparação

Teorema 2.8 *Sendo $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não-negativos,*

(i) *se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será convergente.*

(ii) *se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será divergente.*

Demonstração. Faremos apenas a demonstração de (i) e deixaremos (ii) para o leitor. Seja $\sum b_n$ uma série convergente e $a_n \leq b_n$, $\forall n$. Vamos mostrar que a série $\sum a_n$ também é convergente.
De fato, sejam (B_n) a sequência das somas parciais da série $\sum b_n$ e (A_n) a sequência das somas parciais da série $\sum a_n$, dadas respectivamente por

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_n \quad \text{e} \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n.$$

Note que, como $a_n, b_n \geq 0$, $\forall n$, segue que as sequências (A_n) e (B_n) são crescentes.

Como por hipótese $a_n \leq b_n$, para todo n, somando os n primeiros termos, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_n \leq \sum_{k=1}^{n} b_n,$$

isto é,

$$A_n \leq B_n, \forall n.$$

Como $\sum b_n$ é convergente, segue que a sequência das somas parciais (B_n) é limitada superiormente, i.e., $\exists\, K \in \mathbb{R}$ (na verdade, $K > 0$) tal que $B_n \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, obtemos

$$A_n \leq B_n \leq K, \forall n,$$

e então a sequência (A_n) das somas parciais da série $\sum a_n$ é limitada superiormente. Como (A_n) também é crescente, pelo Teorema 1.13 segue que (A_n) é convergente, i.e.,

$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

□

Exemplo: Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{5n-1}$ converge ou diverge.

Solução. Precisamos encontrar uma maneira de comparar o termo geral da série dada com o termo geral de uma outra série na qual sabemos ser convergente ou divergente. Observe que, $\forall n \in \mathbb{N}$ temos $5n - 1 < 5n$. Tomando os inversos, temos

$$\frac{1}{5n-1} > \frac{1}{5n}.$$

Multiplicando esta última desigualdade por 5, obtemos

$$\frac{5}{5n-1} > \frac{5}{5n} = \frac{1}{n}.$$

Como a série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmônica) e vale a desigualdade acima $\forall n$, pelo teorema acima, o item (ii) nos diz que divergência da série de termo geral menor implica em divergência da série com termo maior, ou seja, concluímos que a série dada é divergente.

2.4.2 Teste da comparação do limite

Teorema 2.9 *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos, se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0,$$

então ambas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem ou divergem.

Demonstração. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ nas hipóteses do teorema.
Considere $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$. Assim, dado $\varepsilon = c > 0$, segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, implica que $|\dfrac{a_n}{b_n} - c| < c$. Ou seja, para qualquer $n \geq n_0$ temos

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < c + c \Rightarrow 0 < a_n < 2cb_n.$$

Portanto, de acordo com o teste de comparação visto anteriormente, a convergência da série $\sum b_n$ e, consequentemente, a convergência da série $2c\sum b_n$, implica na convergência da série $\sum a_n$ e divergência da série $\sum a_n$ implica na divergência da série $\sum b_n$.

□

Exemplo. Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ converge ou diverge.

Solução. Consideremos a série geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, que é convergente. Assim, considerando $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ e $b_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n - 1}} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1 > 0.$$

Portanto, pelo teorema acima, sendo $\sum a_n$ convergente, concluímos que $\sum b_n$ também é convergente.

2.4.3 Teste da integral

Teorema 2.10 *Seja $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e decrescente, com $f(x) > 0$, para todo $x \geq 1$. Ponha $a_n = f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ for convergente.*

Demonstração. Como $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ é decrescente, temos que, $\forall x \in [k, k+1]$, com $k \in \mathbb{N}$,

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k).$$

Integrando em $[k, k+1]$, vem

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx,$$

ou seja,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

Somando para $k = 1$ até um n fixado, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

e então, lembrando que $f(k) = a_k$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq \int_1^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_n. \tag{2.1}$$

Assim:

($\Rightarrow$) Suponha que $\sum a_n$ converge. Logo, a sequência (s_n) das somas parciais é limitada superiormente, ou seja $\exists\, M > 0$ tal que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M, \forall n.$$

Então, de (2.1), obtemos

$$\int_1^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_n \leq M, \forall n,$$

e então a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ convirja. Então, $\forall n > 1$ fixado, segue que $\exists\, L > 0$ tal que

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \leq L.$$

Por (2.1) vem que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx \leq L,$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - a_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq L,$$

e então

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + L,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, a sequência (s_n) das somas parciais é limitada superiormente por $a_1 + L > 0$ e é também crescente pois os a_j's são positivos. Portanto, (s_n) é convergente, i.e.,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty.$$

$\square$

Abaixo apresentamos um exemplo clássico de aplicação.

Exemplo. Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, onde $p > 0$.

Solução. Primeiramente, esta série é chamada de *série hiper-harmônica.* Note que no caso $p = 1$ temos uma série harmônica, à qual já mostramos ser divergente. Vamos, portanto, considerar o caso $p > 0$ e $p \neq 1$.

Defina $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{1}{x^p} = x^{-p}$.

Como $f'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}} < 0$, segue que f é decrescente. Além disso, notamos que $f(x) > 0$, $\forall x \in [1, +\infty)$. Estamos, portanto, nas hipóteses do Teorema do teste da integral. Assim, calculando a integral imprópria:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \begin{cases} +\infty & , \text{ se } \quad p < 1 \\ \frac{1}{1-p} & , \text{ se } \quad p > 1 \end{cases}.$$

Logo, pelo Teste da integral segue que a série hiper-harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p > 0$, é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Um bom exercício a fazer é mostrar para quais valores de $p > 0$ a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

é convergente (segue o mesmo roteiro do exemplo acima, e o caso $p = 1$ deve ser analisado separadamente).

2.4.4 Teste da razão

Teorema 2.11 *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e suponha que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$$

Então,

(i) a série converge se $c < 1$.

(ii) a série diverge se $c > 1$ ou se c for infinito.

(iii) o teste é inconclusivo se $c = 1$.

Demonstração. Faremos apenas a demonstração de (i).
Suponhamos que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1$.

Tome $\varepsilon > 0$ tal que $c + \varepsilon < 1$. Então, pelo limite acima segue que $\exists n_0 > 0$ tal que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - c\right| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, ou seja,

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < c + \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Assim, fixando $n \geq n_0$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < c + \varepsilon, \\
0 &< \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < c + \varepsilon, \\
0 &< \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}} < c + \varepsilon, \\
&\vdots \\
0 &< \frac{a_n}{a_{n-1}} < c + \varepsilon
\end{aligned}$$

Multiplicando todas estas desigualdades obtemos

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} < (c + \varepsilon)^{n - n_0}, \ \forall n \geq n_0.$$

Ou seja,

$$0 < a_n < \frac{a_{n_0}}{(c + \varepsilon)^{n_0}} \cdot (c + \varepsilon)^n, \ \forall n \geq n_0.$$

Como a série $\dfrac{a_{n_0}}{(c + \varepsilon)^{n_0}} \sum (c + \varepsilon)^n$ é uma série geométrica de razão $c + \varepsilon < 1$, esta série é convergente e, portanto, pelo critério de comparação segue que a série $\sum a_n$ é convergente.

$\square$

Exemplo. Investigue a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$.

Solução. Basta montar a razão entre termos consecutivos. Assim,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1} + 5}{3^{n+1}}}{\dfrac{2^n + 5}{3^n}} = \frac{2^{n+1} + 5}{3^n(2^n + 5)} = \frac{2 \cdot 2^n + 2 \cdot 5 - 5}{3^n(2^n + 5)} =$$

$$= \frac{2(2^n+5)}{3^n(2^n+5)} - \frac{5}{3^n(2_n+5)} = \frac{2}{3^n} - \frac{5}{3^n(2^n+5)} \longrightarrow 0$$

quando $n \to +\infty$.
Portanto, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1,$$

e então a série dada é convergente.

2.4.5 Teste da raiz

Teorema 2.12 *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e suponha que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$$

Então,

(i) a série converge se $c < 1$.

(ii) a série diverge se $c > 1$ ou se c é infinita.

(iii) o teste é inconclusivo se $c = 1$.

Demonstração. Faremos a demonstração de (i).
Seja $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = c < 1$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ tal que $c + \varepsilon < 1$ (por exemplo, podemos considerar $\varepsilon = \frac{1-c}{2} > 0$), $\exists\, n_0 > 0$ tal que $\forall n \geq n_0$, temos $|\sqrt[n]{a_n} - c| < \varepsilon$, ou seja,

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < c + \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Elevando esta desigualdade à potência n temos

$$0 < a_n < (c+\varepsilon)^n.$$

Como $c + \varepsilon < 1$ temos que a série geométrica $\sum (c+\varepsilon)^n$ é convergente e, pelo critério de comparação, concluímos que a série $\sum a_n$ também é convergente.

$\square$

Exemplo. Teste a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

Solução. Aplicando o teste da raiz temos

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{2}{n}}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1,$$

o que mostra que a série dada é convergente.

2.5 Séries absolutamente convergentes

Definição 2.13 Se uma série $\sum a_n$ for tal que $\sum |a_n|$ é convergente, então a série $\sum a_n$ será chamada *absolutamente convergente.*

Teorema 2.14 *(Teorema da Convergência Absoluta) Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ *convergir, então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ *convergirá, ou seja, toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Suponha que $\sum |a_n|$ converge. Então, pelo Teorema 2.7 do Critério de Cauchy para séries segue que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m \geq n_0$, implica em

$$\left|\sum_{n=n_0}^{m}|a_n|\right| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$|a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + ... + |a_m| < \varepsilon.$$

Pela desigualdade triangular para módulos vale

$$|a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_m| \leq |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + ... + |a_m| < \varepsilon,$$

e disso concluímos que

$$\left|\sum_{n=n_0}^{m} a_n\right| < \varepsilon, \ \forall m \geq n_0,$$

ou seja, a série $\sum a_n$ também converge.

□

Exemplo. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ é convergente, pois a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ converge.

Podemos interpretar este Teorema como afirmando que a introdução de sinais negativos para diversos termos de uma série convergente de termos positivos tende a ajudar a convergência.

Definição 2.15 Uma série $\sum a_n$ que converge, mas que não é absolutamente convergente, é chamada *condicionalmente convergente*.

Por exemplo, afirmamos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ é convergente e isso poderá ser comprovado com o Teorema do Teste de Leibniz que será apresentado na seção seguinte (Teorema 2.18). Porém, neste caso, temos que $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$, e assim $|a_n| = \frac{1}{n}$, e então a série dos módulos $\sum |a_n|$ será a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$, à qual sabemos ser divergente. Portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ converge condicionalmente.

Podemos extender a Proposição 2.8 para séries absolutamente convergentes como segue.

Proposição 2.16 *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries tais que $|a_n| \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde $b_n > 0$, $\forall n$. Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge absolutamente.*

Demonstração. Suponha $\sum b_n$ convergente e $|a_n| \leq b_n$, $\forall n$. Seja (s_n) a sequência das somas parciais da série $\sum b_n$, ou seja,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Então (s_n) é monótona e convergente e, portanto, limitada. Logo, existe $M \in \mathbb{R}$ (de fato, $M > 0$) tal que $s_n \leq M$, e então, pela hipótese segue que

$$|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| \leq b_1 + b_2 + ... + b_n = s_n \leq M,$$

então, a sequência (σ_n) das somas parciais de $\sum |a_n|$ dada por

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

é limitada superiormante e também é crescente. Logo, (σ_n) é convergente, i.e., a série $\sum |a_n|$ é convergente e, portanto, $\sum a_n$ é absolutamente convergente. □

2.6 Série alternada

Definição 2.17 Uma série *alternada* é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos.

São exemplos de séries alternadas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + ...$$

2.6.1 Teste da série alternada

Teorema 2.18 *(Teste de Leibniz) Se a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + ...,$$

com $b_n > 0$, satisfizer

(i) $b_{n+1} \leq b_n$, *para todo* n *(i.e., a sequência* (b_n) *é decrescente),*

(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$,

então a série é convergente.

Demonstração. Como (b_n) é uma sequência decrescente (por (i)), segue que

$$b_1 > b_2 > b_3 > ...$$

Seja (s_n) a sequência das somas parciais da série, onde:

- $s_1 = b_1$;
- $s_2 = b_1 - b_2 < b_1 = s_1 \Rightarrow s_2 < s_1$;
- $s_3 = b_1 - b_2 + b_3 = s_2 + b_3 > s_2 \Rightarrow s_2 < s_3$;

Ainda, $s_3 = b_1 + (-b_2 + b_3)$. Como (b_n) é uma sequência decrescente, temos que $b_3 < b_2$ e então $-b_2 + b_3 < 0$. Assim,

$$s_3 = b_1 + (-b_2 + b_3) < b_1 = s_1,$$

ou seja,

$$s_1 > s_3.$$

Da mesma forma, como $b_3 > b_4$, pois (b_n) é decrescente, temos $b_3 - b_4 > 0$ e então

$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) > s_2 \Rightarrow s_4 > s_2.$$

Ainda,

$$s_5 = s_3 - b_4 + b_3 < s_5 \text{ e } s_6 = s_4 + (b_5 - b_6) > s_4.$$

Seguindo estes raciocínios montamos duas sequências de somas parciais: as pares (s_{2n}) e as ímpares (s_{2n-1}), onde temos que

$$s_2 < s_4 < s_6 < ... < s_5 < s_3 < s_1.$$

Pela cadeia de desigualdadas montada acima, temos que (s_{2n}) é uma sequência crescente e limitada superiormente por s_1. Portanto,

$$\exists L_1 = \lim_{n \to \infty} s_{2n}.$$

Da mesma forma, sendo (s_{2n-1}) decrescente e limitada inferiormente por s_2, segue que

$$\exists L_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}.$$

Portanto,

$$L_1 \leq L_2,$$

pelas desigualdades acima.

Mostraremos que $L_2 = L_1$.

De fato, note que

$$b_{2n} = s_{2n-1} - s_{2n}.$$

Assim,

$$0 \leq L_2 - L_1 \leq s_{2n-1} - s_{2n} = b_{2n},$$

e como $b_{2n} \to 0$, pelo Teorema do Sanduíche segue que $L_2 - L_1 = 0$, ou seja, $L_1 = L_2$, isto é, a série converge.

□

Exemplo. A série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ é convergente, pois as duas condições do teste da série alternada são satisfeitas:

(i) $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad b_{n+1} < b_n$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$

2.6.2 Outros testes para séries alternadas

Podemos extender as Proposições 2.11 e 2.12 para séries alternadas como segue. Não apresentaremos aqui suas demonstrações pois são análogas às equivalentes 2.11 e 2.12.

Proposição 2.19 *Seja $\sum a_n$ uma série alternada, tal que*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = c.$$

Então, se $c < 1$ a série converge absolutamente, se $c > 1$ a série diverge e se $c = 1$ o teste é inconclusivo.

Proposição 2.20 *Seja $\sum a_n$ uma série alternada, tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c.$$

Então, se $c < 1$ a série converge absolutamente, se $c > 1$ a série diverge e se $c = 1$ o teste é inconclusivo.

Vejamos um exemplo de aplicação.

Exemplo. Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{n!}{10^n}$.

Solução. Usando o teste da razão temos

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{10} = +\infty > 1$$

Portanto, concluímos que a série dada diverge.

2.7 Rearranjo de séries

Seja $\sum a_n$ série de termos não negativos, i.e., $a_n \geq 0$, $\forall n$ e seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção (esta bijeção vai efetuar um "embaralhamento" dos conjuntos dos naturais e, consequentemente, uma reordenação dos termos da sequência a_n). Denotaremos por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$$

a série obtida pela reordenação dos termos da série $\sum a_n$, conforme a bijeção φ.

Temos, pois, a seguinte propriedade para séries de termos não negativos:

Proposição 2.21 *Sejam $\sum a_n$ uma série convergente tal que $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijeção, Então temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}.$$

Demonstração. Sejam (s_n) e (t_m), respectivamente, as sequências das somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum a_{\varphi(m)}$, ou seja,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad t_m = \sum_{k=1}^{m} a_{\varphi(k)}.$$

Então, como $a_n \geq 0$, $\forall n$, temos que (s_n) e (t_m) são crescentes. Supondo $\sum a_n$ e $\sum a_{\varphi(n)}$ convergentes, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n = S,$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \lim_{m\to\infty} t_m = \sup_{m\in\mathbb{N}} t_m = T.$$

Vamos mostrar que $S = T$. Isso provará a Proposição. Ou seja, vamos mostrar que $\sup\limits_n s_n = \sup\limits_m t_m$.

Dado $t_m = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + ... + a_{\varphi(m)}$, denote

$$k = \max\{\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(m)\}.$$

Assim, temos

$$s_k = a_1 + a_2 + ... + a_k \geq t_m.$$

Mas

$$S = \sup s_n \geq s_k \geq t_m,$$

ou seja,

$$S \geq t_m, \forall m.$$

Portanto, S é cota superior para (t_m) e então segue que $S \geq \sup t_m = T$, ou seja,

$$S \geq T.$$

Analogamente mostra-se que $T \geq S$, donde segue que $S = T$.

$\square$

Resumindo, a Proposição acima nos diz que, dada uma série convergente de termos não negativos, alterar a ordem da soma dos seus termos não vai alterar a soma da série. Veremos na Proposição a seguir que isso pode ser estendido para séries absolutamente convergentes.

Antes, porém, apresentaremos uma notação que será útil: para $x \in \mathbb{R}$, denotaremos

$$x^+ = \max\{x, 0\} \quad \text{e} \quad x^- = \max\{-x, 0\}.$$

Com essa notação, temos que $x^+, x^- \geq 0$ e ainda,

$$x = x^+ - x^- \quad \text{e} \quad |x| = x^+ + x^-.$$

Proposição 2.22 *Se $\sum a_n$ for uma série absolutamente convergente e $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção, então*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}.$$

Demonstração. Pela notação acima definida, escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^+ - a_n^-). \tag{2.2}$$

Vamos mostrar que $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes. De fato, como

$$a_n^+ \leq a_n^+ + a_n^- = |a_n|,$$

e como por hipótese $\sum |a_n|$ é convergente, pelo Teorema do teste da comparação segue que $\sum a_n^+$ é convergente.

Analogamente se justifica que $\sum a_n^-$ também é convergente. Logo, à luz ds Proposição 2.3, podemos abrir o somatório infinito em (2.2) como segue:

$$\sum a_n = \sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n^+ - \sum a_n^-,$$

e como $a_n^+, a_n^- \geq 0$, $\forall n$, pela Proposição anterior segue que

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_{\varphi(n)}^+ - \sum a_{\varphi(n)}^- = \sum a_{\varphi(n)}^+ - a_{\varphi(n)}^- = \sum a_{\varphi(n)}.$$

□

Porém, o rearranjo de uma série pode resultar em qualquer valor se a série for condicionalmente convergente. Ou seja, temos a seguinte Proposição:

Proposição 2.23 *Se $\sum a_n$ for condicionalmente convergente (i.e., a série converge, mas não absolutamente), então dado $S \in \mathbb{R}$ qualquer, existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijeção tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = S.$$

Em outras palavras, se $\sum a_n$ converge condicionalmente, podemos rearranjar seus termos de tal modo que a soma da série possa resultar no valor que quisermos!

Um típico exemplo é considerar a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ que é convergente de acordo com o teste de Leibniz, mas a série dos módulos é a série harmônica, que é divergente, e então a convergência da série dada é condicional. Abrindo sua soma, denotando-a por s, temos

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

Dividindo toda a soma por 2, obtemos

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + ...,$$

e então, somando

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + ...$$

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + ...$$

vamos obter

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + ...$$

possui os mesmos termos da série original de soma s, porém reordenados de maneira diferente.

Capítulo 3

Sequências de funções

Neste capítulo vamos considerar uma teoria análoga àquela estudada para limites de sequências numéricas aplicada em um tipo especial de sequência, onde os termos são funções ao invés de números reais, ou seja, vamos estudar *sequências de funções* $(f_n)_n = (f_1, f_2, f_3, ...)$.

3.1 Conceito

Definição 3.1 Seja X um conjunto de números reais. Definimos por *sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ como a correspondência que associa para cada $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n de X em $\mathbb{R}$.

Vamos examinar um exemplo. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência

$$f_n : [0, 10] \to \mathbb{R}$$

por

$$f_n(x) = \frac{x}{n}.$$

Neste caso, temos

$$f_1 : [0, 10] \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x;$$

$$f_2 : [0, 10] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \frac{x}{2};$$

$$f_3 : [0, 10] \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \frac{x}{3};$$

e assim por diante. Faça um esboço gráfico dos primeiros termos dessa sequência de funções (f_n). Considere $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$. Podemos observar que à medida em que n aumenta, o gráfico de f_n vai se aproximando cada vez mais do gráfico de f. É nesse sentido que se estuda convergência de sequência de funções. Existem dois tipos importantes de convergência: a *convergência simples* e a *convergência uniforme*, como veremos na próxima seção.

3.2 Convergência simples e uniforme

Definição 3.2 Seja $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dada uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ e dada $f : X \to \mathbb{R}$, dizemos que:

(1) f_n converge para f *simplesmente*, e escrevemos $f_n \to f$ se, para todo $x \in X$ fixado, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

(2) f_n converge para f *uniformemente*, e escrevemos $f_n \rightrightarrows f$, se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall x \in X$, $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

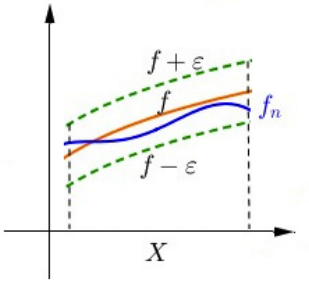
Em outras palavras, a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge simplesmente a f quando, para cada $x \in X$ fixado, a sequência de números reais $(f_n(x))_n = (f_1(x), f_2(x), ...)$ converge para o número $f(x)$, e dessa forma o $n_0 \in \mathbb{N}$ da definição depende do ε e da escolha do x, ou seja, $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$. Então, para todo $x \in X$ fixado,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

A função $f : X \to \mathbb{R}$, se existir, é chamada de *função limite*.

Já a convergência uniforme é mais forte: dado $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que, a partir desse índice, os gráficos de todas as f_n estarão próximos do gráfico de f a menos de ε. Ou seja, conseguimos obter um n_0 que sirva para todos os $x \in X$, i.e., neste caso o $n_0 \in \mathbb{N}$ dependerá somente do ε, ou seja, $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Observe o desenho abaixo, onde temos o gráfico de f e os gráficos

dos translados $f+\varepsilon$ e $f-\varepsilon$, onde, no interior temos uma *faixa de raio* ε, na qual os gráficos de f_n ficam no interior, para todo $n \geq n_0$, devido à convergência ser uniforme.



Para deixar esses conceitos de convergência mais claros, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Considere a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \text{ se } x = 1 \end{cases}.$$

É fácil ver que $f_n \to f$ simplesmente. De fato, para todo $x \in [0,1)$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

e

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$$

Porém, afirmamos que f_n não converge para f uniformemente, i.e., $f_n \not\rightrightarrows f$.

De fato, se por exemplo tomarmos $\varepsilon = \frac{1}{4}$, construindo a faixa de raio $\varepsilon = \frac{1}{4}$ em torno do gráfico de f, veremos f_n não fica contida em tal faixa, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Faça um desenho para verificar.

Exemplo 2. Considere a sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

Afirmamos que f_n converge simplesmente para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 0$.

De fato, basta observar que para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1 + n^2x^2} = 0 = f(x).$$

No entanto, afirmamos que tal convergência não é uniforme, e isso pode ser verificado se conseguirmos mostrar que todas as funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiverem a mesma amplitude, e issi é feito verificando os pontos de máximo e mínimo das f_n. De fato, a derivada de f_n será

$$f_n'(x) = \frac{(1 + n^2x^2)n - nx \cdot 2n^2x}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{n(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{n(1 - nx)(1 + nx)}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Logo, os pontos críticos de f são onde $f_n'(0) = 0$, o que nos fornecem $x = \pm\frac{1}{n}$, e daí $f_n(\frac{1}{n}) = \pm\frac{1}{2}$.

Primeiramente, notamos que, para todo $x < -\frac{1}{n}$ segue que $1 + nx < 0$. Logo, somando -2 nessa desigualdade, vamos obter

$$-2 + 1 + nx < -2 \Rightarrow -1 + nx < -2,$$

o que, multiplicando por -1, vem $1 - nx > 2 > 0$. Assim, obtemos

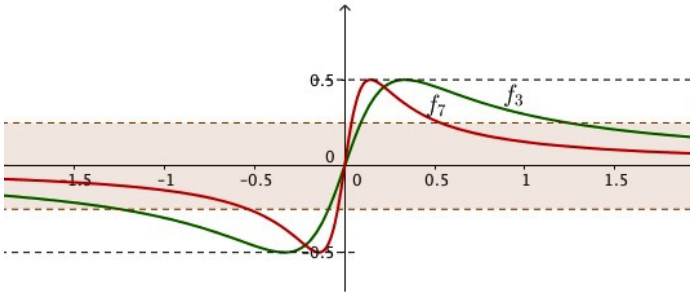
$$\forall x < -\frac{1}{n} \Rightarrow f_n'(x) < 0.$$

Analogamente, obteremos

$$\forall x > -\frac{1}{n} \Rightarrow f_n'(x) > 0.$$

Portanto, f_n tem um ponto de mínimo em $x = -\frac{1}{n}$. Deixamos o leitor verificar que f_n possui ponto de máximo em $x = \frac{1}{n}$.

Então, qualquer faixa de raio menor do que $\frac{1}{2}$ construída para $f(x) \equiv 0$, teremos que os gráficos das f_n não ficarão inteiramente contidos em tal faixa, e então $f_n \not\rightrightarrows f$. Veja a figura abaixo, onde desenhamos, para ilustrar, os gráficos de $f_3(x)$ e $f_7(x)$ e uma faixa de raio $\frac{1}{4}$ centrada em $f(x) \equiv 0$.



Sejamos mais precisos no que diz respeito à convergência simples neste exemplo: para todo $x \in \mathbb{R}$, vamos mostrar que $f_n \to f \equiv 0$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \frac{n|x|}{1 + n^2x^2} \leq \frac{n|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n|x|}.$$

Assim, precisamos escolher um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon|x|}, \tag{3.1}$$

e assim, para todo $n \geq n_0$, teremos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{n_0|x|} < \frac{\varepsilon|x|}{|x|} = \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$, e portanto $f_n \to f \equiv 0$ simplesmente.

Observação. Observe neste exemplo que a desigualdade (3.1) nos diz que se x for muito pequeno, então o n_0 terá de ser muito grande. Logo, a convergência não pode ser uniforme, pois o índice n_0 fica dependendo de ε e de x, ou seja, $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$.

No que segue, apresentamos um importante resultado para investigar se uma convergência é uniforme. Antes, porém, precisamos definir sequência de Cauchy para sequência de funções.

Definição 3.3 Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ chama-se *sequência de Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m, n \geq n_0$, implicar em $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$.

Isso posto, enunciamos:

Teorema 3.4 *Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uniformenente convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponha que $f_n \rightrightarrows f$. Seja $\varepsilon > 0$. Pela Definição de convergência uniforme, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in X$.

Logo, para $m, n \geq n_0$ vale:

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq$$
$$\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todo $x \in X$. Ou seja, (f_n) é de Cauchy.

Reciprocamente, suponha que (f_n) é de Cauchy. Então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$, $\forall m, n \geq n_0$.

Vamos definir uma função $f : X \to \mathbb{R}$ do seguinte modo: fixado $x_0 \in X$, a sequência de números reais $(f_n(x_0))_n$ é de Cauchy, e portanto converge para um limite $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Defina $f(x_0) = y_0$, e isso para cada x_0 fixado. Isso define $f : X \to \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que $f_n \rightrightarrows f$.

Como (f_n) é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, temos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall m, n \geq n_0, \ \forall x \in X.$$

Com $x \in X$ e $n \geq n_0$ fixados, a desigualdade acima vale $\forall m \geq n_0$. Fazendo $m \to \infty$, vamos obter

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

e isso para todo $n \geq n_0$ e para todo $x \in X$, provando que $f_n \rightrightarrows f$.

$\square$

Outro resultado importante é o descrito abaixo:

Proposição 3.5 *Sejam f_n e $f : X \to \mathbb{R}$. Então, f_n converge para f uniformemente se, e somente se,*

$$d_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Demonstração. Suponha que $f_n \to f$ uniformemente. Vamos mostrar que $d_n \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to f$ uniformemente, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in X$, $\forall n \geq n_0$.

Fixando $n \geq n_0$, vale $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in X$. Portanto,

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

isto é, $d_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, ou seja, $d_n \to 0$.

Reciprocamente, suponha que $d_n \to 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $d_n < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Assim, pela definição de supremo segue que para todo $x \in X$ e para todo $n \geq n_0$, tem-se que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq d_n < \varepsilon,$$

o que prova que $f_n \to f$ uniformemente.

□

Vejamos um exemplo de aplicação. Considere $f_n : (0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = nxe^{-nx}$.

Considerando a função $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 0$, afirmamos que f_n converge para f simplesmente. De fato, basta notar que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{nx}{e^{nx}} = 0.$$

Vejamos se a convergência é uniforme. A derivada de f_n será

$$f_n'(x) = \frac{ne^{nx} - nxne^{nx}}{e^{2nx}} = \frac{n(1 - nx)}{e^{nx}}.$$

Assim, os pontos críticos são quando $f_n'(x) = 0$, o que corresponde em verificar onde $1 - nx = 0$, ou seja, $x = \frac{1}{n}$. Então,

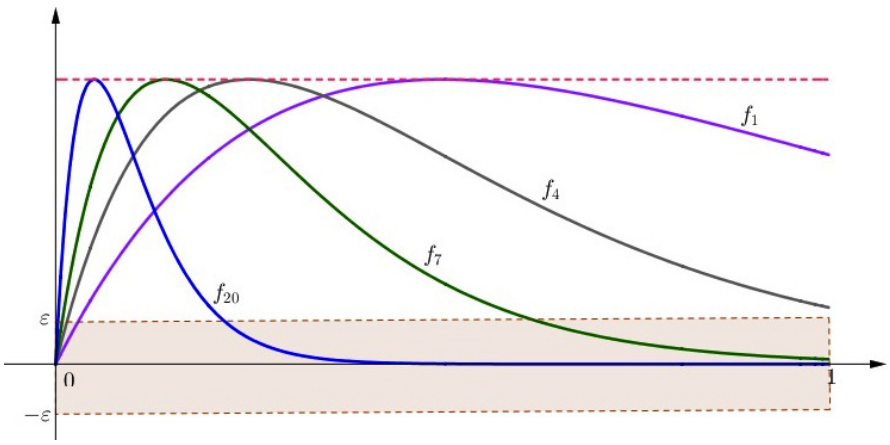
- se $x < \frac{1}{n}$, então $f_n'(x) = \frac{n(1-nx)}{e^{nx}} > 0$;
- se $x > \frac{1}{n}$, então $f_n'(x) = \frac{n(1-nx)}{e^{nx}} < 0$.

Portanto, segue que $x = \frac{1}{n}$ é um ponto de máximo para as f_n. Usando a Proposição 3.5, temos

$$d_n = \sup_{x\in(0,1]} |nxe^{-nx} - 0| = \max_{x\in(0,1]} \frac{nx}{e^{nx}} = \frac{nx}{e^{nx}}\Big|_{x=\frac{1}{n}} = \frac{1}{e} \not\to 0,$$

e então segue que a sequência (f_n) não converge uniformemente.

Abaixo, a título de curiosidade, temos os esboços gráficos de f_1, f_4, f_7 e f_{20} e a reta pontilhada corresponde à altura máxima atingida quando $x = \frac{1}{n}$ que corresponde a $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{e}$. Repare que, realmente, construindo uma faixa de raio ε em torno da função limite $f(x) = 0$, $\forall x \in (0, 1]$, temos neste caso que todas as f_n ficam fora da referida faixa, o que ilustra que realmente a convergência para a função identicamente nula não é uniforme, somente simples.



3.3 Propriedades da convergência uniforme

Nesta seção vamos apresentar algumas propriedades importantes da convergência uniforme.

Teorema 3.6 *Sejam $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ tais que a sequência de funções (f_n) converge a f uniformemente. Seja $x_0 \in X$. Se, para todo $n \in \mathbb{N}$, a função f_n for contínua em x_0, então a função limite f também é contínua em x_0.*

Demonstração. Suponha que $f_n \to f$ uniformemente. Assim, dado $\varepsilon > 0$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in X, \forall n \geq n_0. \tag{3.2}$$

Fixe $n = n_0$. Como f_{n_0} é contínua em x_0, por hipótese, segue que $\exists \delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ tal que $|x - x_0| < \delta$, implica em

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.3}$$

Isto posto, para todo $x \in X$ tal que $|x - x_0| < \delta$, temos que

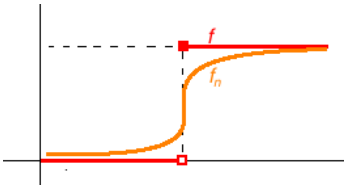
$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

onde no aditivo de módulos acima, o primeiro e o terceiro módulos ficam majorados por $\frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in X$, devido a (3.2) e o segundo fica majorado por $\frac{\varepsilon}{3}$ devido a (3.3). Logo, f também é contínua em x_0.

□

Observação. O Teorema acima é falso se a convergência for somente simples. Por exemplo, veja a ilustração abaixo, onde as f_n são todas contínuas em x_0 e convergem para uma f que não é contínua em x_0.



Para um exemplo interessante a fim de constatar esta observação basta revisitar o Exemplo 1 da Seção 3.2, onde as $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = x^n$ são contínuas em 1, mas a função limite não. Isso ocorreu pois a convergência de tais f_n para a f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad \text{se } x = 1 \end{cases}$$

não é uniforme, é apenas simples.

Teorema 3.7 *Seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções integráveis, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Se $f_n \to f$ uniformemente, então f é integrável e $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$. Em outras palavras,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Demonstração. Suponha as f_n integráveis e que $f_n \to f$ uniformemente.

Af. 01. f é integrável.

Como $f_n \rightrightarrows f$, dado $\varepsilon > 0$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \ \forall n \geq n_0, \forall x \in [a,b]. \tag{3.4}$$

Como por hipótese esta f_n é integrável em $[a,b]$, segue que existe uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f_n; P) - s(f_n; P) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.5}$$

De (3.4) segue que

$$f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \ \forall n \geq n_0, \forall x \in [a,b],$$

e como essa desigualdade vale para todo $n \geq n_0$ e para todo $x \in [a,b]$, em particular valerá para

$$f(x) \leq \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \ \forall n \geq n_0, \forall x \in [a,b].$$

Ainda, tal desigualdade é verdadeira para todo $x \in [a,b]$, e em particular valerá para $\sup f$ em $[a,b]$, ou seja,

$$\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \leq \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \ \forall n \geq n_0, \forall x \in [a,b].$$

Multiplicando pelo respectivo comprimento $t_i - t_{i-1}$ do subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, obtemos

$$\sup_{x \in [t_i - 1, t_i]} f(x)(t_{i-1} - t_i) \leq \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f_n(x)(t_{i-1} - t_i) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(t_{i-1} - t_i),$$

o que, somando sob todos os i's, vamos obter

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [t_i - 1, t_i]} f(x)(t_{i-1} - t_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f_n(x)(t_{i-1} - t_i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(t_{i-1} - t_i)$$

ou seja,

$$S(f;P) \leq S(f_n;P) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.6}$$

Analogamente, obtemos

$$s(f;P) \geq s(f_n;P) - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.7}$$

Fazendo (3.6) − (3.7), obtemos

$$S(f;P) - s(f;P) \leq S(f_n;P) - s(f_n;P) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},$$

e de acordo com (3.5), concluímos

$$S(f;P) - s(f;P) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

e portanto f é integrável, ou seja, vale a Afirmação 01.

Af. 02. $\displaystyle\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f.$

De fato, como $f_n \rightrightarrows f$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \ \forall n \geq n_0, \ \forall t \in [a,b].$$

Então

$$|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt| = |\int_a^b (f_n(t) - f(t))dt| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dt = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Logo, vale a Afirmação 2.

As duas afirmações provam o Teorema.

□

Vejamos um exemplo de aplicação. Sejam $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$.

Afirmamos que $f_n \to f$ uniformemente. De fato, basta usar a Proposição 3.5: note que

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| = \frac{1}{1+nx}.$$

Assim, temos

$$d_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{1+nx}.$$

Defina $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$g_n(x) = \frac{x}{1+nx}.$$

Como

$$g_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0, \ \forall x \in [0,1],$$

segue que g_n é crescente em seu domínio. Além disso, g_n também é contínua em $[0,1]$. Portanto,

$$d_n = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{1+nx} = \sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = \max_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n(1) = \frac{1}{1+n} \to 0,$$

e então pela Proposição 3.5 segue que $f_n \to f$ uniformemente.

Verifiquemos, por fim, o Teorema 3.7. Primeiramente, temos por um lado que

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{nx^2}{1+nx}dx,$$

e como

$$\begin{aligned}
\int \frac{nx^2}{1+nx}dx &= \frac{1}{n}\int \frac{n^2x^2}{1+nx}dx = \frac{1}{n}\int \frac{n^2x^2-1+1}{1+nx}dx = \\
&= \frac{1}{n}\int \left(\frac{(nx+1)(nx-1)}{1+nx} + \frac{1}{1+nx}\right)dx = \\
&= \frac{1}{n}\int (nx-1)dx + \frac{1}{n}\int \frac{dx}{1+nx} = \\
&= \frac{1}{n}\left(n\frac{x^2}{2} - x\right) + \frac{1}{n^2}\int \frac{ndx}{1+nx} = \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}\ln|1+nx| + c,
\end{aligned}$$

e então pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)dx &= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}\ln|1+nx| + c\Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\ln(1+n),
\end{aligned}$$

e então

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\ln(1+n)\right) = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

ou seja, cumpriu-se o Teorema 3.7:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx,$$

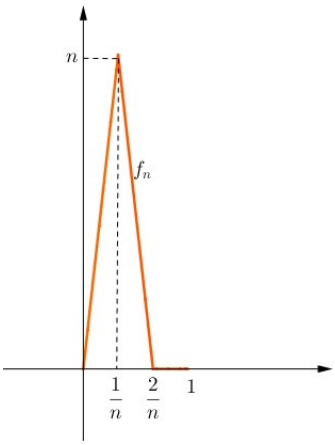
visto que $f_n \to f$ uniformemente.

Observação. Se $f_n \to f$ apenas simplesmente, então o Teorema 3.7 é falso. Por exemplo, considere as $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & , \text{ se } \quad x \in [0, \frac{1}{n}) \\ -n^2x + 2n & , \text{ se } \quad x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0 & , \text{ se } \quad x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ (a função identicamente nula).

As f_n são integráveis pois são contínuas. Abaixo temos um esboço gráfico das f_n. Nesse esboço percebemos que $f_n \to f \equiv 0$, pois à medida que o índice n aumentar, mais alta ficará a altura n do triângulo, mais fina ficará a base de tamanho $\frac{2}{n}$, e então ficará cada vez maior o intervalo $[\frac{2}{n}, 1]$ onde $f_n(x) = 0$.



Pelo desenho temos que

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\frac{2}{n}\cdot n}{2} = 1, \forall n \geq 3,$$

e então

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Por outro lado,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0,$$

ou seja,

$$\int_0^1 f_n \not\to \int_0^1 f.$$

Isso aconteceu porque $f_n \not\rightrightarrows f$.

Frente ao Teorema acima provado poderíamos pensar se vale algum análogo para derivadas. No entanto, afirmamos que não. Ou seja, o fato de $f_n \to f$ uniformemente não implica em $f_n' \to f'$. Vejamos dois exemplos para ilustrar esse fato. Por exemplo, as funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ são tais que $f_n \rightrightarrows f \equiv 0$ (Verifique!), mas

$$f_n'(x) = \cos nx \not\to f' \equiv 0.$$

De fato, neste exemplo, $f_n'(x) = \cos nx$ não converge nem mesmo simplesmente!

Para um outro exemplo, considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ e as $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Neste caso também temos que $f_n \to f$ uniformemente (Verifique!), as f_n são deriváveis, mas $\nexists f'(0)$.

Ou seja, não existe um resultado análogo ao Teorema 3.7 para derivadas, pelo menos no mesmo formato que no referido Teorema. O que existe é o resultado seguinte, o qual omitiremos sua prova, mas a mesma pode ser encontrada, por exemplo, no livro Curso de análise, Vol. I, do Elon L. Lima, página 303.

Teorema 3.8 *Sejam $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções deriváveis. Suponha que*

(i) $\exists x_0 \in (a,b)$ *tal que a sequência numérica* $(f_n(x_0))_n$ *é convergente;*

(ii) $f_n' \to g$ *uniformemente.*

Então, f_n *converge uniformemente a uma função* f*, e* f *é derivável com* $f' = g$*.*

Observação. Na prática, se verificarmos que

(a) as f_n são deriváveis;

(b) $f_n \to f$ uniformemente;

(c) $f_n' \to g$ uniformemente;

então f é derivável e $f' = g$.

Capítulo 4

Séries de funções

Neste capítulo vamos estudar o conceito de séries de funções. Do mesmo modo que no estudo de sequências de funções, existem dois tipos principais de convergências de séries de funções - a convergência simples e a convergência uniforme - isso porque considerando (S_n) a sequência das somas parciais $s_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$, então podemos determinar propriedades análogas a muitas vistas no Capítulo anterior. Nosso principal foco de estudo neste capítulo serão as séries uniformemente convergentes e daremos uma atenção especial também ao estudo de séries de potências.

4.1 Conceitos

Definição 4.1 Seja (f_n) uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$. Para cada $x \in X$, definimos a sequência numérica das somas parciais $(S_n(x))_n$ por

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \forall x \in X$$

Se, para cada $x \in X$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ convergir, diremos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é convergente.

Para o estudo de séries de funções temos também os conceitos de convergência simples e uniforme, e serão análogos aos estudados no capítulo anterior, considerando a sequência (S_n) das somas parciais da série.

Definição 4.2 Dizemos que a série de funções $\sum f_n$ converge simplesmente se a sequência das somas parciais (S_n) convergir simplesmente, i.e., se para todo $x \in X$, a série numérica $\sum f_n(x)$ convergir.

Neste caso, definimos a função $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \ \forall x \in X,$$

chamada de soma da série.

Definição 4.3 Diremos que a série de funções $\sum f_n$ converge uniformemente se a sequência (S_n) das somas parciais convergir uniformemente.

Proposição 4.4 *A série de funções $\sum f_n$ converge uniformemente se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon, \ \forall m > n \geq n_0, \ \forall x \in X.$$

Demonstração. Seja (S_n) a sequência das somas parciais da série $\sum f_n$. Então, temos que $\sum f_n$ converge uniformemente se, e somente se, $(S_n(x))_n$ converge uniformemente, $\forall x \in X$. Mas $(S_n(x))_n$ converge uniformemente se, e somente se, $(S_n(x))_n$ for de Cauchy, $\forall x \in X$, e isso se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0$, implicar em $|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$. Sem perda de generalidade, suponha que $m > n \geq n_0$. Então, para o $\varepsilon > 0$ dado e $m > n > n_0$, temos que $\sum f_n$ converge uniformemente se, e somente se,

$$|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)| = |\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)| = |S_m(x) - S_{n-1}(x)| < \varepsilon.$$

□

4.2 Teste M de Weierstrass

No que segue apresentamos um importante Teorema para verificar se a convergência de uma série de funções é uniforme.

Teorema 4.5 *(Teste M de Weierstrass) Seja $\sum f_n$ uma série de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$. Suponha que*

(i) $|f_n(x)| \leq M_n$ *(obviamente $M_n \geq 0, \forall n$), $\forall x \in X$;*

(ii) *a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente.*

Então a série $\sum f_n$ converge uniformemente.

Demonstração. Como a série numérica $\sum M_n$ converge, pelo critério de Cauchy para séries numéricas (Teorema 2.7), dado $\varepsilon > 0$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m > n \geq n_0$, implica em (note que $M_k \geq 0$, $\forall k$)

$$\sum_{k=n}^{m} M_k = |\sum_{k=n}^{m} M_k| < \varepsilon.$$

Portanto, lembrando que de (i) temos $|f_n(x)| \leq M_n$ e a estimativa por ε acima encontrada, temos que

$$|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} M_k < \varepsilon,$$

e pela Proposição 4.4 segue que $\sum f_n$ converge uniformemente.

□

Exemplo 1. Verifiquemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ converge uniformemente. De fato, definindo $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$, observe que:

(i) $|f_n(x)| = |\dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2}| \leq \dfrac{1}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (neste caso, tomamos $M_n = \frac{1}{n^2}$)

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, pois é a série hiper-harmônica com $p = 2 > 1$.

Portanto, pelo Teste M de Weierstrass, segue que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ converge uniformemente.

Exemplo 2. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente em todo intervalo da forma $(-a, a)$.

De fato, basta observar que, definindo $f_n : (-a, a) \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, temos que

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{a^n}{n!},$$

i.e., neste caso temos $M_n = \dfrac{a^n}{n!}$. Ainda, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ é convergente, pois pelo teste da razão do limite, denotando o termo geral da série por $b_n = \dfrac{a^n}{n!}$, vem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0 < 1.$$

Logo, temos as condições (i) e (ii) do teste M de Weierstrass, donde segue a convergência uniforme da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Proposição 4.6 *Seja $\sum f_n$ uma série uniformemente convergente de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então, sua soma é integrável e*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Demonstração. Seja (S_n) a sequência das somas parciais da série $\sum f_n$. Como $\sum f_n$ converge uniformemente, segue que a sequência $(S_n(x))_n$ converge uniformemente, $\forall x \in [a, b]$, para $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Além disso, S_n é integrável, $\forall n$, pois

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

é uma soma de funções integráveis. Então, pelo Teorema 3.7 do Capítulo anterior, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)dx,$$

onde

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx,$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b (f_1(x)+...+f_n(x))dx\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx.$$

□

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Seja $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(t) = t^n$. Sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \text{ para } t \in (-1,1). \text{ (série geométrica)}$$

Para cada $c \in (-1,1)$, temos

(i) $|f_n(t)| = |t^n| \leq |c|^n$, $\forall c \in (-1,1)$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |c|^n$ é convergente (série geométrica de razão $|c| < 1$)

Então, pelo teste M de Weierstrass segue que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ converge uniformemente no intervalo $[-c,c]$. Assim, $\forall x \in [-c,c]$, c.f. a Proposição 4.6,

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt,$$

i.e.,

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^x,$$

logo,

$$-\ln(1-t)|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

ou seja,

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \ \forall x \in (-1,1).$$

Exemplo 2. Para $t \in (-1,1)$, temos a série geométrica

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}.$$

Esta série será uniformemente convergente em todo intervalo fechado contido em $(-1,1)$. Assim, $\forall x \in (0,1)$, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan x.$$

Pela Proposição 4.6, temos

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

chamada de Série de Taylor para $\arctan x$ no intervalo $(-1,1)$.

4.3 Séries de Potências

Nesta seção estudaremos o importante conceito de séries de potências.

Definição 4.7 Chama-se uma *série de potências* a uma série de funções da forma

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes da série.

Note que, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, tal série torna-se uma série numérica.

Teorema 4.8 *Se a série $\sum a_n x_1^n$ converge, então a série $\sum a_n x^n$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < |x_1|$. Além disso, para todo $0 < |x| \leq c < |x_1|$, a convergência é uniforme em $[-c, c]$.*

Demonstração. A prova da primeira parte é simples, basta usar o teste da comparação (Teorema 2.8) e deixamos para o leitor. Façamos a prova da segunda parte. Como a série $\sum a_n x_1^n$ converge, segue que o termo geral $a_n x_1^n$ tende a zero quando n tende a infinito. Ou seja, segue que a sequência $(a_n x_1^n)_n$ é limitada. Assim, $\exists\, M > 0$ tal que

$$|a_n x_1^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considere $0 < |x| \leq c < |x_1|$. Assim temos

- $|a_n x^n| \leq |a_n c^n| = |a_n x_1^n \cdot \dfrac{c^n}{x_1^n}| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\dfrac{c}{x_1}\right|^n \leq M \left(\dfrac{c}{|x_1|}\right)^n$;
- a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{c}{|x_1|}\right)^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $\frac{c}{|x_1|} < 1$.

Portanto, pelo Teste M de Weierstrass segue que a série $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[-c, c]$.

$\square$

Precisamos agora saber em qual intervalo vai haver convergência da série, ou seja, precisamos determinar um intervalo no qual a série desenvolvida seja convergente.

Admitamos que a série $\sum a_n x^n$ seja convergente. Assim, pelo teste da raiz temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

ou seja, temos que a série $\sum a_n x^n$ converge para todo x tal que $|x| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

A esse número real definimos por *raio de convergência* da série e o denotamos por

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Portanto, a série $\sum a_n x^n$ converge, para todo x tal que $|x| < R$ (mais que isso: a convergência será uniforme em $[-c, c]$, onde $0 < c < R$). O conjunto dos pontos x tais que $|x| < R$ fornece o intervalo $(-R, R)$, chamado de *intervalo de convergência* da série. Para $|x| = R$ precisamos verificar em cada caso se haverá convergência da série ou não. Abaixo apresentamos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 01. Determine para quais valores de x a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} x^n$ é convergente.

Solução. Calculando o raio de convergência R temos

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n}{3^n}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3.$$

Portanto, a série converge para todo x real tal que $|x| < 3$, i.e., em $(-3, 3)$. Resta ver se há convergência nas extremidades, i.e., em $x = -3$ e em $x = 3$:

- $x = -3$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n,$$

  que é uma série alternada divergente.

- $x = 3$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} 3^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n,$$

  que é divergente.

Portanto, a série dada converge no intervalo aberto $(-3, 3)$.

Exemplo 02. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}x^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Solução. Note que

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^{n-1}}{\sqrt{n}}} = \frac{3^{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt[2n]{n}}.$$

e então

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt[2n]{n}}} = \frac{1}{3}.$$

assim, $R = \frac{1}{3}$ e a série converge em $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
Vejamos nas extremidades do intervalo.

- $x = -\frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

  Note que, $\forall n$, $n \geq \sqrt{n}$ e então $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Logo, a série diverge pelo teste da comparação.

- $x = \frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}},$$

  que é uma série alternada com $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Ainda, temos que

  (i) $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$, $\forall n$ e então $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, i.e., $b_{n+1} \leq b_n$;

  (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

  Portanto, pelo teste de Leibniz, a série é convergente.

Assim, o intervalo de convergência é $(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}]$.

Observação. Um fato importante que devemos observar neste ponto consiste em notar que, c.f. o Teorema 4.8, temos que uma função $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum a_n x^n$ (série de potências) converge uniformemente em todo intervalo fechado da forma $[-c, c]$, onde $0 < c < R$. Por exemplo, a função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada pela série geométrica $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente em $[-c, c]$, $\forall c \in (0, 1)$., mas não converge quando $x = -1$ e $x = 1$.

4.4 Derivação termo a termo. Série de Taylor

Lembrando do estudo de sequências de funções, lembramos do Teorema 3.8 que se (f_n) for uma sequência de funções deriváveis tal que

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{e} \quad f_n' \rightrightarrows g,$$

então f é derivável e $f' = g$.

Isso posto, adaptado para séries, temos o seguinte Lema:

Lema 4.9 *Considerando $f_n(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x)$ deriváveis, temos que, se*

$$\sum \varphi_n(x) \quad e \quad \sum \varphi_n'(x) \quad \textit{convergem uniformemente,}$$

então

$$\left(\sum \varphi_n(x)\right)' = \sum \varphi_n'(x).$$

Teorema 4.10 *Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com raio de convergência $R > 0$. Então f é derivável e a derivada é obtida termo a termo, ou seja,*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1},$$

com o mesmo raio de convergência.

Demonstração. Seja R' o raio de convergência de $\sum na_n x^{n-1}$. Note que

$$\sum na_n x^{n-1} \text{ converge } \Leftrightarrow x\sum na_n x^{n-1} \text{ converge } \Leftrightarrow \sum na_n x^n \text{ converge.}$$

Assim,

$$R' = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R,$$

onde R é o raio de convergência de $\sum a_n x^n$. Logo, o raio de convergência é o mesmo.

Além disso, $\forall 0 < c < R$ temos que $\sum a_n x^n$ e $\sum na_n x^{n-1}$ convergem uniformemente em $[-c, c]$. Logo, pelo Lema 4.9 temos $f(x) = \sum a_n x^n$ derivável em $(-c, c)$ e $f'(x) = \sum na_n x^{n-1}$, $\forall x \in (-c, c)$. Como c é qualquer, vale para todo $x \in (-R, R)$.

□

Corolário 4.11 *Se $f(x) = \sum a_n x^n$ com raio de convergência $R > 0$, então $f \in C^\infty$ e podemos derivar termo a termo repetidas vezes.*

Proposição 4.12 *O termo geral a_n de uma série de potências $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é dado por*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Demonstração. Dada

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ...,$$

temos,

$$f(0) = a_0.$$

Derivando, obtemos

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + ...,$$

e disso,

$$f'(0) = a_1.$$

Derivando novamente, obtemos

$$f''(x) = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3x + ...,$$

e disso,

$$f''(0) = 2 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2},$$

etc.

□

Dessa forma, uma série de potências pode ser expressa por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n =$$

$$= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + ...,$$

conhecida por série de Maclaurin desenvolvida em torno de $x = 0$.

Um resultado mais geral consiste em considerar a função f como uma série de potências em $x - a$, i.e.,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n,$$

conhecida por *série de Taylor* de f desenvolvida em $x = a$.

Exemplo 1. Vamos desenvolver a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ como uma série de potências. Para isto, notamos que

$$f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(8)}(x) = f^{(12)}(x) = ... = \operatorname{sen} x;$$

$$f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(9)}(x) = f^{(13)}(x) = ... = \cos x;$$

$$f''(x) = F^{(6)}(x) = f^{(10)}(x) = f^{(14)}(x) = ... = -\ \operatorname{sen} x$$

$$f'''(x) = f^{(7)}(x) = F^{(11)}(x) = f^{(15)}(x) = ... = -\cos x\,,$$

e então

$$f(0) = f^{(4)}(0) = f^{(8)}(0) = f^{(12)}(0) = ... = \operatorname{sen} 0 = 0;$$

$$f'(0) = f^{(5)}(0) = f^{(9)}(0) = f^{(13)}(0) = ... = \cos 0 = 1;$$

$$f''(0) = F^{(6)}(0) = f^{(10)}(0) = f^{(14)}(0) = ... = -\ \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f'''(0) = f^{(7)}(0) = F^{(11)}(0) = f^{(15)}(0) = ... = -\cos 0 = -1,$$

e assim,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ...$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

e deixamos o leitor verificar que o reio de convergência é infinito.

Do mesmo modo, mostra-se que a expansão em série de potências para $\cos x$ será

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Exemplo 2 - Fórmulas de Euler. Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = e^x$, onde $e = 2,7182818284590...$ é o número de Euler. Assim, x não pode ser expresso como um número complexo na forma $a+bi$, com $b \neq 0$.

A menos que estendamos esta função para a teoria de Variáveis Complexas, o que não desejamos, só podemos ter a unidade imaginária em expressões polinomiais. Assim, procuraremos representar e^x na forma de um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$, onde $a_i \in \mathbb{C}$, $\forall i \in \{0, 1, 2, ...\}$.

Isto nos sugere a aplicação de séries de Taylor. Logo, desenvolvendo e^x em série de potências em $x = 0$, obtemos

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + ... + \frac{f^n(0)x^n}{n!} + ... =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^k(0)x^k}{k!}.$$

Como $\dfrac{d^n}{dx^n}(e^x) = e^x$, temos

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^n(0) = ... = e^0 = 1,$$

e com isto, concluímos que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Substituindo x por $i\theta$, $i = \sqrt{-1}$, obtemos

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + ...$$

ou seja,

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + ... \tag{4.1}$$

Separando as partes real e imaginária de (4.1) temos

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ...\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...\right).$$

Como

$$\sin\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ...$$

$$\cos\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...,$$

temos que (4.1) fica escrito na forma[1]

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta. \tag{4.2}$$

[1]Este é um resultado importante para o estudo de *Equações Diferenciais*.

Substituindo θ por $-\theta$ e recordando que o seno é função ímpar e o cosseno é função par, obtemos também

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \cdot \sin(-\theta) = \cos\theta - i \cdot \sin\theta. \tag{4.3}$$

Somando (4.2) e (4.3) e isolando $\cos\theta$ obtemos

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}. \tag{4.4}$$

Subtraindo (4.3) de (4.2) e isolando $\sin\theta$ obtemos

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{4.5}$$

Estas fórmulas são as clássicas *Relações de Euler* que definem as funções circulares em termos de exponenciais. As demais funções circulares também podem ser obtidas aplicando-se estas fórmulas.

Repare que estas fórmulas são muito parecidas com as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico. De fato, existe uma íntima ligação entre elas através de números complexos. Mais geralmente, existe uma íntima ligação entre as funções hiperbólicas e as trigonométricas.

Antes de chegarmos a estas ligações, porém, deduziremos uma interessante relação, conhecida também como *relação de Euler*, que liga os cinco número mais importantes da Matemática: $0, 1, \pi, e$ e i.
Do estudo de números complexos, temos que um número complezo z possui a representação $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ na forma trigonométrica, onde ρ representa o módulo de z, i.e., a distância de z até a origem do plano complexo e θ é o argumento de z, i.e., o ângulo de inclinação do vetor oz em relação ao eixo real, indicado no sentido anti-horário, como na Trigonometria.
Por (4.2) podemos escrever

$$z = \rho(\cos\theta + i \cdot \sin\theta) = \rho e^{i\theta},$$

que é a chamada *forma polar* de um número complexo z. Assim, para representar o complexo $z = -1$ na forma polar, temos $\rho = 1$ e $\theta = \pi$, e com isto

obtemos

$$-1 = z = 1 \cdot e^{i\pi},$$

ou seja,

$$e^{\pi \cdot i} + 1 = 0.$$

Esta é a chamada Relação de Euler.

Voltemos para o assunto anterior, sobre ligações entre funções hiperbólicas e trigonométricas.

Estendendo a definição de seno hiperbólico para os complexos temos que, para $z \in \mathbb{C}$, $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$. Em particular, para $z = ix$ com $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\sinh ix = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = i \cdot \sin x,$$

ou seja,

$$\sinh ix = i \cdot \sin x$$

Analogamente se pode mostrar que

$$\cosh ix = \cos x \quad \text{e} \quad \tanh ix = i \cdot \tan x.$$

A demonstração destas fica como exercício.

4.4.1 Algumas séries de potências usuais

Nas seções anteriores já determinamos várias séries de potências, para várias funções conhecidas. A saber, determinamos

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ |\forall x \in (-1, 1);$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \ \forall x \in (-1, 1);$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ \forall x \in \mathbb{R};$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Vamos determinar uma representação em série para a função binomial $f(x) = (1+x)^m$. Observe que, pelo desenvolvimento em binômio de Newton, a soma será finita se n for um número natural. Vamos, então, considerar m negativo ou racional. Neste caso, determinando os coeficientes da série de Maclaurin para tal função, vamos obter

- $f(x) = (1+x)^m \Rightarrow f(0) = 1;$
- $f'(x) = m(1+x)^{m-1} \Rightarrow f'(0) = m;$
- $f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} \Rightarrow f''(0) = m(m-1);$
- $f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \Rightarrow f'''(0) = m(m-1)(m-2);$
- $\vdots$
- $f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-(k-1))(1+x)^{m-k}$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = m(m-1).\cdots(m-k+1);$$

- $\vdots$

Dessa forma, o desenvolvimento da série será

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f''(0)}{3!}x^3 + ... =$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}x^k + ...$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!} x^n,$$

chamada de série binomial.

Uma outra forma de verificar o raio de convergência de uma série é verificar onde o teste da razão se cumpre. Neste caso, a série binomial será convergente, pelo teste da razão do imite, quando

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| < 1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right| \cdot |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1,$$

ou seja, o raio de convergência é $R = 1$.

Vejamos um interessante exemplo. Considere determinar a série de Taylor para $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Neste caso, pela série binomial acima determinada, temos

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} + ...$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

Se integramos em $[0, x]$, para $x \in (0, 1)$, obteremos a representação em série de potências para a função arco seno de x:

$$\operatorname{arcsen} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Índice Remissivo

Bolzano-Weierstrass, 27

convergência simples, 68
convergência uniforme, 68
crescente, sequência, 11
Critério de Cauchy para séries, 48

decrescente, sequência, 11

forma polar, 97

intervalos fechados encaixados, 26

limite de sequência, 3
limite de sequência numérica, 4

monótona, sequência, 11

número complexo, 95

ponto aderente, 36

raio de convergência, 90
relação de Euler, 97
relações de Euler, 97

série, 39
série absolut. conv., 57
série alternada, 59
série convergente, 40
série de funções, 83
série de Maclaurin, 94
série de potências, 88
série de Taylor, 94
série divergente, 40
série geométrica, 43
série harmônica, 46, 48
série hiper-harmônica, 53
sequência, 1
sequência de Cauchy, 31
sequência de Cauchy de funções, 71
sequência de funções, 67
sequências numéricas, 1
subsequência, 3

teorema da conv. absoluta, 57
teorema do valor extremo, 29
termo geral da série, 39
termo geral, critério, 46

Teste M de Weierstrass, 85
teste da comparação, 49
teste da integral, 52
teste da raiz, 56
teste da razão, 54
teste da série alternada(Leibniz), 59
teste de Leibniz, 59