

**Fundação Universidade Federal de Pelotas**  
**Curso de Licenciatura em Matemática**  
**Disciplina de Sequências e Séries - Prof. Dr. Maurício Zahn**  
**Lista 01 de Exercícios - Sequências**

1. Prove que cada limite a seguir pela definição.

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{3-5n} = -\frac{2}{5}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2-4n}{4n-7} = -1$$

2. Prove o seguinte teorema, versão para sequências do Teorema do Sanduíche:

**Teorema.** Sejam  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  e  $(z_n)$  sequências tais que  $x_n \leq y_n \leq z_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$ , então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$ .

3. Utilize o teorema anterior para provar que  $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$ .

4. Sendo  $a, b \geq 0$ , mostre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$ .

5. Seja  $(x_n)$  a sequência definida por  $x_n = \sqrt[n]{2}$ . Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

6. (**Sel. Mestr. UFRGS 2010/1**) Prove que se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  e  $(b_n)_{n \geq 0}$  é uma sequência limitada, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ . Mostre com um contra-exemplo que a conclusão acima não é válida se retirarmos a hipótese de  $(b_n)_{n \geq 0}$  ser limitada.

7. Prove que se  $(x_n)$  for uma sequência tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , então toda subsequência de  $(x_n)$  tem o mesmo limite  $a$ .

8. Seja  $(x_n)$  uma sequência tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = a.$$

9. Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$ .

**Sugestão:** Escreva inicialmente  $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}$ .

10. Seja  $(x_n)$  uma sequência de números reais e suponha que  $\exists \lambda$ , com  $0 < \lambda < 1$  e  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tais que  $|x_{n+1}| \leq \lambda |x_n|$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Prove que  $x_n \rightarrow 0$ .

11. Seja  $(x_n)$  uma sequência de números reais positivos tais que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ . Prove que  $\exists \lambda$ , com  $0 < \lambda < 1$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que  $|x_{n+1}| \leq \lambda |x_n|$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Conclua que

$$x_n > 0, \forall n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \implies x_n \rightarrow 0.$$

Em seguida, use o resultado acima para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{a^n}{n!} = 0, \forall a > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

12. Encontre o limite da seguinte sequência, justificando:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}$$

13. Defina uma sequência  $(x_n)$  recursivamente por

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 1.$$

Prove que  $(x_n)$  é monótona e limitada e calcule o seu limite.

14. (**Sel. Mestr. UFSM 2014**) Seja  $a > 0$  e  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequência definida indutivamente por

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right).$$

Mostre que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente e calcule o seu limite.

15. (**Sel. Mestr. UFSM 2010/1**) Seja  $(a_n)$  uma sequência dada recursivamente por  $a_1 = \sqrt{3}$  e  $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$ ,  $n > 1$ . Mostrar que  $(a_n)$  é convergente. Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

16. Prove que a sequência

$$1, \sqrt{1+\sqrt{1}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \dots$$

converge e que seu limite é  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

17. Seja  $x_1 = 1$  e ponha  $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ . Verifique que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |x_{n+1} - x_n|.$$

Conclua que existe  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , e determine o valor de  $a$ .

18. Ponha  $x_1 = 1$  e defina  $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$ . Mostre que a sequência  $(x_n)$ , assim obtida, é limitada. Determine  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

19. Dado  $a > 0$ , defina indutivamente a sequência  $(x_n)$  pondo  $x_1 = \sqrt{a}$  e  $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ . Prove que  $(x_n)$  é convergente e calcule o limite

$$L = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}$$

20. Considere a sequência de números reais

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \quad \dots$$

Mostre que essa sequência é convergente e encontre seu limite.

21. (**Sel. Mestr. UFRGS 2008/2**) Considere duas sequências reais  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$  tais que  $a_n$  converge para  $a$  e  $b_n$  converge para  $b$ . Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então obtenha de forma rigorosa o limite da sequência  $(a_n f(b_n))_n$ .