Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Física e Bacharelado em Física
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 10 de Exercícios

1. Calcule a derivada y' de cada função abaixo:

   (a) $y = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ (b) $y = x \ln(\operatorname{arcsen} \sqrt{x})$ (c) $y = \operatorname{arccot} \dfrac{x+1}{\cot x}$

   (d) $y = \sqrt{\dfrac{x}{\operatorname{arccsc} x}}$ (e) $xy + \arccos \dfrac{x}{y} = \ln(x-y)$ (f) $\arctan \sqrt{x+y} + \arccos y = x$

2. Encontre todos os pontos críticos de cada função a seguir.

   (a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ (b) $f(x) = 8x^3 - x^2$ (c) $f(x) = 4x - \sqrt{x^2+1}$

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

3. Se r metros for o alcance de um projétil, então

$$r = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

   onde v_0 m/s é a velocidade inicial, g m/s^2 é a aceleração da gravidade e θ é a medida em radianos do ângulo que a arma faz com a horizontal. Ache o valor de θ para que o alcance seja máximo. (Resp. $\frac{\pi}{4}$).

4. Um pedaço de arame com 10 m de comprimento é cortado em duas partes. Uma delas é curvada na forma circular e a outra, na forma de um quadrado. Como dividir o fio de tal modo que a área combinada das duas figuras seja a menor possível?
   (Resp. raio da circunferência: $\frac{5}{\pi+4}$ m; lado do quadrado: $\frac{10}{\pi+4}$m).

5. Um fazendeiro dispõe de 600 m de material para cercar um pasto retangular adjacente a um muro já existente. Ele planeja construir uma cerca paralela ao muro, duas cercas formando as extremidades laterais e uma quarta cerca (paralela às duas últimas) para dividir o cercado em duas partes iguais. Qual é a área máxima que pode ser cercada?

6. Ache o raio e a altura de um cilindro circular reto com o maior volume, o qual pode ser inscrito em um cone circular reto com 10 cm de altura e 6 cm de raio.

7. Se 1200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível para fazer tal caixa (considere o material sendo um quadrado de área 1200 cm^2).
   (Resp. altura da caixa: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm; lado: $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ cm).

8. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 cm e 4 cm, se dois lados do retângulo estiveres sobre os catetos.
   (Resp. A área máxima será 3 cm^2).

9. Duas torres têm respectivamente 50 e 30 pés de altura, e estão separadas por uma distância de 150 pés. Um cabo-guia deve ser estendido de um ponto A no solo entre os postes, até o topo de cada torre. Localize o ponto A de modo que o comprimento total do cabo seja mínimo.

10. Encontre o número positivo tal que a soma dele com o seu inverso seja tão pequena quanto possível.

11. Os pontos A e B estão em lados opostos de um rio reto com 3 km de largura. O ponto C está na mesma margem que B, mas 2 km rio abaixo. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de A até C. Se o custo por quilômetro do cabo 25% maior sob a água do que em terra, como deve ser estendido o cabo, de forma que o custo seja o menor para a companhia?

12. Uma lata cilíndrica sem tampa é feita para receber V cm^3 de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo de metal para fabricá-la. (Resp. altura = raio = $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$).

13. Ache as dimensões do maior cilíndro reto que se pode inscrever em uma esfera de raio 12 cm. (Resp. raio $4\sqrt{6}$ e altura $8\sqrt{3}$).

14. Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior área de superfície lateral que possa ser inscrito numa esfera de raio 6 cm. (Resp. raio $3\sqrt{2}$ cm e altura $6\sqrt{2}$ cm).

15. A resistência de uma viga retangular é conjuntamente proporcional à sua largura e ao quadrado da sua profundidade. Ache as dimensões da viga mais resistenteque possa ser cortada de uma tora na forma de um cilindro circular reto com 72 cm de raio. (Resp. $48\sqrt{3}$ cm de largura e $48\sqrt{6}$ cm de profundidade).

16. Faça um estudo completo de cada função abaixo, determinando domínio, zeros, assíntotas (se existirem), pontos críticos, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximos e mínimos, concavidades e pontos de inflexão.

    (a) $f(x) = x^4 - 2x^3$

    (b) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$

    (c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x-3}$

    (d) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$

    (e) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

    (f) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3-1}$

    (g) $f(x) = (1-x)x^{\frac{1}{5}}$

    (h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

    (i) $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

    (j) $f(x) = 2 + (x-3)^{\frac{1}{3}}$

    (k) $f(x) = 2\tan\frac{x}{2}$; $x \in (-\pi, \pi)$

    (ℓ) $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

    (m) $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}$

    (n) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$

17. Um fabricante pretende construir uma caixa retangular a partir de uma lâmina de 8cm$\times$5cm, cortando um quadrado de cada um de seus cantos. Ache o lado desse quadrado para que o volume da caixa a ser construída seja máximo. (Resp. 1cm).

18. A taxa (em mg de carbono/m^3/h) na qual a fotossíntese ocorre para uma espécie de fitoplâncton é modelada pela função

$$p = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

    onde I é a intensidade de luz (medida em milhares de velas). Para qual intensidade de luz p é máximo? (Resp. $I = 2$).

19. Encontre o número positivo tal que a soma dele com o seu inverso seja tão pequena quanto possível.

20. Numa dada comunidade, uma certa epidemia alastra-se de tal forma que x meses após o seu início, $P\%$ da população estará infectada, onde

$$P = \frac{30x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Em quantos meses o número de infectados atingirá o máximo e que porcentagem da população esse número representa? (Resp. 1 mês, $P = 7,5\%$).

21. Se uma lata fechada com volume 16π cm^3 deve ter a forma de uma cilindro circular reto, ache a altura e o raio, se um mínimo de material deve ser usado em sua fabricação.
(Resp. $R = 2$ cm e $h = 4$ cm).

22. Calcular o volume máximo do cilíndro circular reto que pode ser inscrito em um cone de 12cm de altura e 4cm de raio da base, de modo que os eixos do cilindro e do cone coincidam.
(Resp. $R = \frac{8}{3}$cm e $h = 4$cm, e portanto $V = \frac{256\pi}{9}$cm^3).

23. Prove que uma função polinomial de terceiro grau possui exatamente um ponto de inflexão. Faça alguns desenhos para ilustrar também.

24. Seja $f(x) = x^n$, onde $n > 1$. Mostre que o gráfico de f tem um ponto de inflexão se n for ímpar e não tem nenhum ponto de inflexão se n for par.

25. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$. Que condições as constantes b e c devem satisfazer para que 1 seja ponto de inflexão de f?