LISTA 10 (CÁLCULO 1)
PROF. MAURÍCIO ZAHN.

01)

(a) $y = \operatorname{arctan} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \operatorname{arctan} v$

$$v = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}$$

$$y' = \frac{v'}{1+v^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cancel{(1-x)}\sqrt{(1-x)}} \cdot \frac{\cancel{1-x}}{2-x} = \frac{1}{2(2-x)\sqrt{1-x}}$$

(b) $y = x \cdot \ln(\operatorname{arcsen}\sqrt{x}) = u \cdot v$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v = \ln(\operatorname{arcsen}\sqrt{x}) \Rightarrow v' = \frac{\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}}{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}} = \frac{1}{2\operatorname{arcsen}\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}$$

(c) $x \cdot y + \operatorname{arccos}\frac{x}{y} = \ln(x-y)$. Derivando em x, obtemos:

$$x \cdot y' + 1 \cdot y + \frac{(xy^{-1})'}{-\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = \frac{1-y'}{x-y}$$

$$xy' + y - \frac{x \cdot (-y^{-2} \cdot y') + 1 \cdot y^{-1}}{\sqrt{\frac{y^2-x^2}{y^2}}} = \frac{1-y'}{x-y}$$

$$xy'+y+\frac{\frac{xy'}{y\cancel{x}}}{\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{\cancel{y}}}-\frac{\frac{1}{\cancel{y}}}{\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{\cancel{y}}}=\frac{1-y'}{x-y}$$

$$xy'+y+\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\cdot y'-\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}=\frac{1}{x-y}-\frac{y'}{x-y}$$

$$\left(x+\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{1}{x-y}\right)\cdot y'=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$y'=\frac{\frac{1}{x-y}+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}}{x+\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{1}{x-y}}$$

---

02) (b) $f'(x)=0$ ou onde $\nexists f'(x)$.

$f'(x)=24x^2-2x$. Como f é uma função polinomial, temos que sempre existe $f'(x)$, $\forall x$.

Então, nesse caso, os pontos críticos serão somente onde $f'(x)=0$; i.e., onde:

$$24x^2-2x=0 \iff x(24x-2)=0$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ 24x=2 \iff x=\frac{1}{12} \end{cases}$$

Resp.: $x=0$ e $x=\frac{1}{12}$

(c) $f(x)=4x-\sqrt{x^2+1}=4x-(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=4-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x=4-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Pontos críticos: onde $f'(x)=0$ e onde $\nexists f'(x)$.

$\nexists f'(x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=0$, o que nunca ocorre pois $x^2+1>0, \forall x$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+1}-x=0$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+1}=x$$
$$\Leftrightarrow \left[4\sqrt{x^2+1}\right]^2=[x]^2$$
$$\Leftrightarrow 16(x^2+1)=x^2$$
$$\Leftrightarrow 16x^2-x^2=-16$$
$$\Leftrightarrow 15x^2=-16$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{-16}{15}$$

(impossível em reais)

Logo, f não possui pontos críticos.

(d) $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\cdot 1=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Pontos críticos: onde $f'(x)=0$ e onde $\nexists f'(x)$

Mas $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=0 \Leftrightarrow 1=0$ (Absurdo);

logo, quando $f'(x)=0$ não existem pontos críticos.

No entanto, quando $\nexists f'(x)$:

$$\nexists f'(x) \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$$

conclusão: f possui um ponto crítico em $x=0$.

---

03) $r : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$r(\theta) = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen} 2\theta}{g}.$$

Esta função é contínua (porque a função seno é contínua, e composição de funções contínuas é uma função contínua), e tal função contínua está definida num intervalo fechado $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Logo, pelo Teorema do Valor extremo segue que r assume valores máximo e mínimo em $[0, \frac{\pi}{2}]$, podendo ocorrer nas extremidades, ou em algum ponto crítico.

Ponto crítico: $r'(\theta) = 0$; onde

$$r'(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos 2\theta \cdot 2 = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \cos 2\theta$$

$$r'(\theta) = 0 \iff \frac{2 v_0^2}{g} \cdot \cos 2\theta = 0 \iff \cos 2\theta = 0 \iff 2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\iff \theta = \frac{\pi}{4}. \quad \left(\theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\right)$$

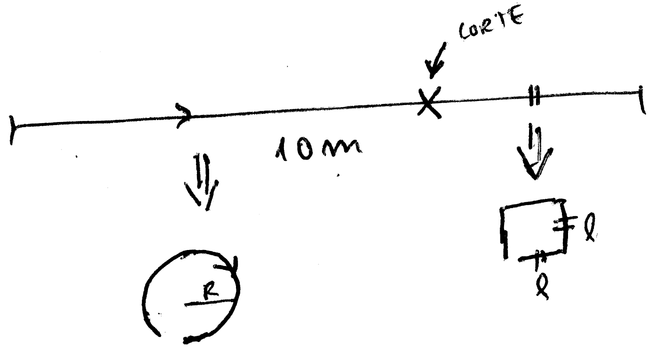
$r'(\theta)$ existe, $\forall\, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, logo, não precisamos verificar onde $\nexists\, r'(\theta)$.

Assim, em $[0, \frac{\pi}{2}]$, temos um só ponto crítico: $\theta = \frac{\pi}{4}$.

θ	$r(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen} 2\theta$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{v_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{v_0^2}{g} > 0$ (MAIOR VALOR)
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{v_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen} \pi = 0$

Logo, o alcance será máximo quando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

04)



Área deve ser máxima.

$A = \pi \cdot R^2 + l^2$; PERÍMETRO = 10m = $2\pi R + 4l$

$$5 = \pi R + 2l$$

$$A = \pi . R^2 + \left(\frac{5-\pi R}{2}\right)^2 \quad \boxed{l = \frac{5-\pi R}{2}}$$

$A = A(R)$. VALORES EXTREMOS PARA O RAIO:

- $R = 0$: caso quando só montamos um quadrado
- $R = 10$: caso quando só montamos a circunferência.

Assim, $A : [0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$A(R) = \pi R^2 + \left(\frac{5-\pi R}{2}\right)^2 .$$

Como A é contínua e está definida em um intervalo fechado, pelo Teorema do Valor extremo segue que A assume um valor máximo e um valor mínimo em $[0, 10]$, podendo ocorrer numa das extremidades, ou em algum ponto crítico no seu interior.

Pontos críticos: $A'(R) = 0$ ou onde $\nexists\, A'(R)$.

nunca ocorre pois $A(R)$ é dada por um polinômio.

$$A'(R) = 2\pi R + \cancel{2} . \left(\frac{5-\pi R}{\cancel{2}}\right)^1 . \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A'(R) = 2\pi R - \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi^2}{2} . R .$$

$$A'(R) = 0 \iff 2\pi R - \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi^2}{2} R = 0 \quad (\div \pi)$$

$$\iff 2R - \frac{5}{2} + \frac{\pi}{2} R = 0$$

$$\iff \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) . R = \frac{5}{2}$$

$$\iff \frac{4+\pi}{\cancel{2}} . R = \frac{5}{\cancel{2}} \iff \boxed{R = \frac{5}{4+\pi} \, m}$$

PONTO CRÍTICO.

R	$A(R) = \pi R^2 + \left(\frac{5-\pi R}{2}\right)^2$
0	0
$\frac{5}{4+\pi}$	$\pi . \left(\frac{5}{4+\pi}\right)^2 + \left(\frac{5 - \pi . \frac{5}{4+\pi}}{2}\right)^2 = \cdots = \frac{25}{4+\pi}$ (MÁXIMO VALOR)
10	$100\pi + \left(\frac{5-10\pi}{2}\right)^2 < \frac{25}{4+\pi}$

Logo, a área total será máxima quando $R = \frac{5}{4+\pi}$ m;

e nesse caso, teremos

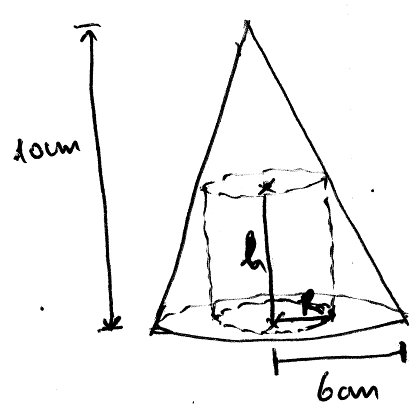
$$l = \frac{5-\pi R}{2} = \frac{5 - \pi . \left(\frac{5}{4+\pi}\right)}{2} = \frac{\frac{20 + \cancel{5\pi} - \cancel{5\pi}}{4+\pi}}{2} = \frac{10}{4+\pi} \, m.$$

---

05) FOI FEITO COMO EXEMPLO EM AULA.

---

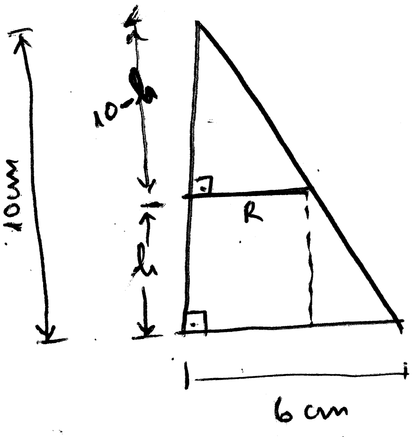
06)



Achar o maior cilindro que possa ficar inscrito (dentro) de um cone de altura 10 cm e raio 6 cm.

(i.e.: h e R do cilindro devem ser máximos.) – ou seja, volume máximo.

Observando um traço transversal dos sólidos, observamos triângulos semelhantes:



Assim, pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{10-h}{R} = \frac{10}{6}$$

$$6.(10-h) = 10R \quad (\div 2)$$

$$3(10-h) = 5R$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{5}.(10-h)$$

O volume do cilindro será:

$$V = Ab.h = \pi R^2.h$$

$$V = \pi\left[\frac{3}{5}(10-h)\right]^2.h = \frac{9\pi}{25}.(10-h)^2.h$$

Valores extremos para a altura h:

$h = 10$: caso onde o cilindro vira a altura do cone

$h = 0$: caso onde o cilindro vira a base do cone

Assim, definimos $V : [0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$V(h) = \frac{9\pi}{25}.(10-h)^2.h$$

Como V é contínua e está definida num intervalo fechado, pelo Teorema do Valor extremo segue que V assume valores máximo e mínimo em $[0,10]$, podendo ocorrer numa das extremidades do intervalo ou em algum ponto crítico do seu interior.

Pontos críticos: quando $V'(h) = 0$ [$V'(h)$ sempre existe].

$$V'(h) = \frac{9\pi}{25}.\left[(10-h)^2.h\right]' \underset{\text{DERIVADA DO PRODUTO}}{=} \frac{9\pi}{25}.\left((10-h)^2.1 + 2.(10-h).(-1).h\right)$$

$$V'(h) = \frac{9\pi}{25} \cdot (10-h) \cdot (10-h-2h)$$

$$= \frac{9\pi}{25} \cdot (10-h)(10-3h)$$

Assim, $V'(h) = 0 \iff 10-h=0$ ou $10-3h=0$

$\iff h = 10$ cm ou $h = \frac{10}{3}$ cm.

(já é uma extremidade)

h	$V(h) = \frac{9\pi}{25} \cdot (10-h)^2 \cdot h$
0	0
$\frac{10}{3}$	$\frac{9\pi}{25} \cdot \left(10-\frac{10}{3}\right)^2 \cdot \frac{10}{3} > 0$ (MAIOR VALOR)
10	$\frac{9\pi}{25}(10-10)^2 \cdot 10 = 0$

Assim, o maior cilindro com maior volume que pode ser inscrito no cone dado terá $\frac{10}{3}$ cm de altura. Neste caso, o seu raio da base será:

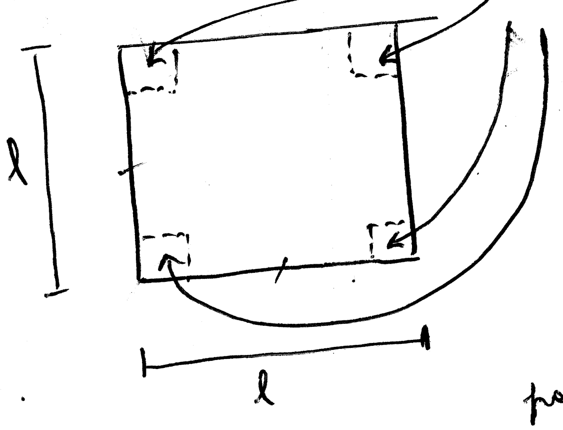
$$\underset{\sim}{R} = \frac{3}{5} \cdot (10-h)$$

$$= \frac{3}{5}\left(10-\frac{10}{3}\right) = \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \left(\frac{\cancel{20}^{4}}{3}\right) = \underset{\sim}{4 \text{ cm}}$$

---

07) $A = 1200\ m^2$.

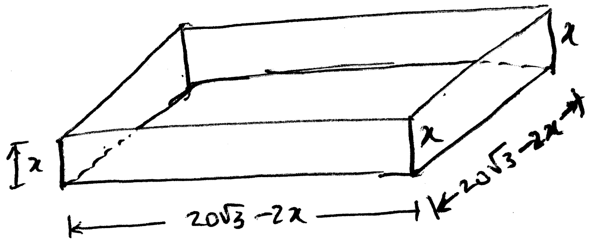
PRECISAMOS RETIRAR ESSES 4 CANTOS PARA FAZER A CAIXA.
ESSE 4 CANTOS SÃO 4 QUADRADOS MENORES DE LADO x



$$A = 1200 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{1200}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{l} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = \underset{\sim}{20\sqrt{3}\ m}$$

Cada lado será descontado $2x$, isso para "levantar" a altura da caixa, que será x m :



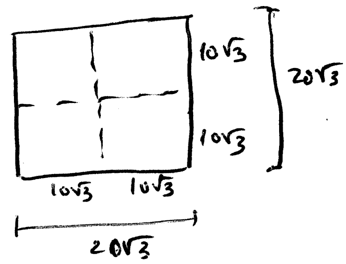
O volume $V(x)$ será:

$$V(x) = (20\sqrt{3}-2x)^2 \cdot x$$

Valores extremos para x:

$x = 0$; nesse caso não cortamos os 4 cantos e não formamos a caixa

$x = 10\sqrt{3}$; caso "degenerado" nos 4 cantos:



Assim, definimos

$$V : [0, 10\sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por}$$

$$V(x) = (20\sqrt{3}-2x)^2 \cdot x$$

Como V é contínua no intervalo fechado $[0, 10\sqrt{3}]$, pelo Teorema do valor extremo segue que V assume ~~valores~~ máximo e mínimo em $[0, 10\sqrt{3}]$, que podem ocorrer ou nas extremidades ou nos pontos críticos no seu interior.

$$V'(x) = (20\sqrt{3}-2x)^2 \cdot 1 + 2\cdot(20\sqrt{3}-2x)\cdot(-2)\cdot x$$

$$= (20\sqrt{3}-2x)\cdot[20\sqrt{3}-2x-4x] = (20\sqrt{3}-2x)\cdot(20\sqrt{3}-6x)$$

PONTOS CRÍTICOS:

$$V'(x) = 0 \iff (20\sqrt{3}-2x)(20\sqrt{3}-6x) = 0$$

$$\iff x = 10\sqrt{3}\ \cancel{\text{cm}} \quad \text{ou} \quad x = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ \cancel{\text{cm}}.$$

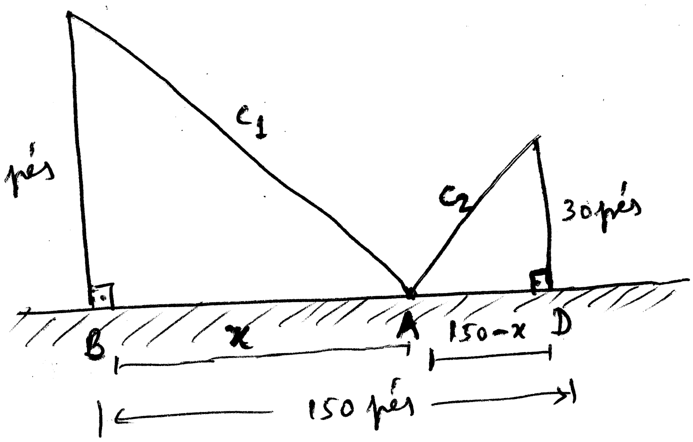
x	$V(x) = (20\sqrt{3}-2x)^2 \cdot x$
0	0
$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	$\left(20\sqrt{3} - \frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} > 0$ (DÁ O MÁXIMO)
$10\sqrt{3}$	0

Portanto, o maior volume é obtido quando a caixa tiver altura

$x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ ~~m~~ e lado $l = 20\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ m

---

09)



O comprimento "c" do cabo deve ser mínimo.

Se $\overline{AB} = x$, então $\overline{AD} = 150 - x$ e daí o comprimento "c" do cabo será

$c = c_1 + c_2$, onde

$$c_1^2 = 50^2 + x^2 \quad \text{e} \quad c_2^2 = 30^2 + (150-x)^2. \quad \text{Logo:}$$

$$c = \sqrt{50^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (150-x)^2}, \quad \text{onde } x \in [0, 150].$$

Ou seja, definimos $c : [0,150] \to \mathbb{R}$,

$$c(x) = \sqrt{50^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (150-x)^2}; \text{ contínua em } [0,150].$$

Logo, pelo T. do valor extremo temos que c assume valores máximo e mínimo em $[0,150]$.

$$c'(x) = \frac{1}{2}(50^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot (30^2 + (150-x)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2(150-x) \cdot (-1))$$

$$\Rightarrow c'(x) = \frac{x}{\sqrt{50^2 + x^2}} - \frac{150 - x}{\sqrt{30^2 + (150-x)^2}}.$$

Note que sempre existe $c'(x)$, $\forall x$, pois embora exista incógnita no denominador, o mesmo não pode ser zero. Assim, só temos pontos críticos onde $c'(x) = 0$, ou seja,

$$C'(x) = 0 \iff \frac{x}{\sqrt{50^2+x^2}} = \frac{150-x}{\sqrt{30^2+(150-x)^2}}$$

$$x\sqrt{30^2+(150-x)^2} = (150-x).\sqrt{50^2+x^2}.$$

Elevando ao quadrado;

$$x^2(30^2+(150-x)^2) = (150-x)^2.(50^2+x^2)$$

$$30^2.x^2 + \cancel{(150-x)^2.x^2} = 50^2.(150-x)^2 + \cancel{(150-x)^2.x^2}$$

$$30^2.x^2 = 50^2.(150-x)^2$$

$$3\cancel{0}.3\cancel{0}.x^2 = 5\cancel{0}.5\cancel{0}.(150-x)^2$$

$$9x^2 = 25.(150-x)^2$$

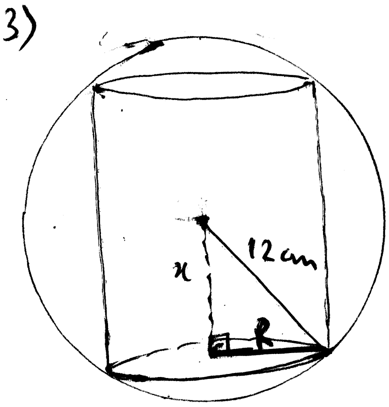
$$\Rightarrow 16x^2 - 7500x + 562500 = 0 \quad \therefore \begin{cases} x = 375 \\ x = \frac{375}{4} \end{cases}$$

Como $375 \notin [0,150]$, temos que o único ponto crítico que devemos analisar é $\frac{375}{4}$.

x	$C(x) = \sqrt{50^2+x^2} + \sqrt{30^2+(150-x)^2}$
0	$\sqrt{50^2} + \sqrt{30^2+150^2} \cong 202,97$
$\frac{375}{4}$	$\sqrt{50^2+\left(\frac{375}{4}\right)^2} + \sqrt{30^2+\left(150-\frac{375}{4}\right)^2} \cong 118,97$ [DÁ O VALOR MÍNIMO]
150	$\sqrt{50^2+150^2} + \sqrt{30^2} \cong 188,11$

Logo, o custo será mínimo quando $x = \frac{375}{4}$ pés.

13)



O volume V do cilindro deve ser máximo.

$V = A_b . h = \pi R^2 . 2x$

$V = 2\pi x R^2$. (altura: $2x$)

Pelo T. de Pitágoras,

$x^2 + R^2 = 144 \Rightarrow R^2 = 144 - x^2$, e assim:

$$V = 2\pi x . (144 - x^2)$$

$$V = 2\pi(144x - x^3), \quad \text{onde } x \in [0, 6]$$

(pois $2x \in [0, 12]$)

Assim, definimos

$$V : [0, 6] \to \mathbb{R}$$

$$V(x) = 2\pi(144x - x^3),$$

que é contínua em $[0, 6]$ (intervalo fechado). Assim, pelo T. do valor intermediário, V assume valores máximo e mínimo em $[0, 6]$, que pode ocorrer nos extremos ou nos pontos críticos.

$$V'(x) = 2\pi . (144 - 3x^2).$$

Pontos críticos: $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\pi(144 - 3x^2) = 0$

$\Leftrightarrow 144 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{144}{3}}$

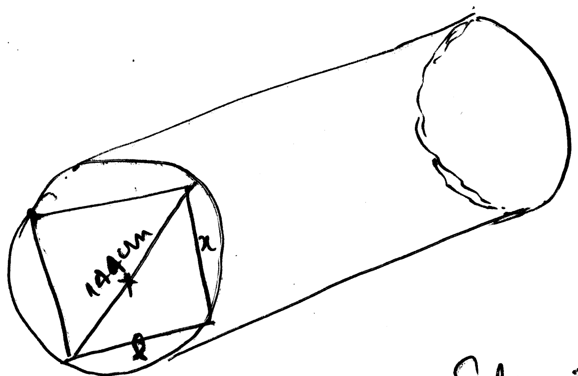
$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$ cm.

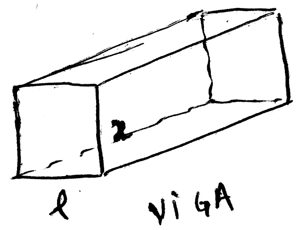
x	$V(x) = 2\pi(144x - x^3)$
0	0
$4\sqrt{3}$	$\cong 1330{,}21\,\pi$ cm³ (daí o valor máx.)
6	$= 1296\pi$ cm³

Logo, o volume V será máximo quando a altura for

$2x = 2.(4\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}$ cm, e nesse caso $R = 4\sqrt{6}$ cm.

15) $R = k \cdot l \cdot x^2$, onde K = CONSTANTE DE PROPORCIONALIDADE.





Pelo T. de Pitágoras:

$$(144)^2 = l^2 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = l^2 - (144)^2 .$$

Assim;

$$R = k \cdot l \cdot (l^2 - 144^2)$$

$$\rightarrow R(l) = k \cdot (l^3 - 144^2 \cdot l) \quad ; \text{ com } l \in [0, 144].$$

(etc. ...)

---

16) (a) $f(x) = x^4 - 2x^3$. $D(f) = \mathbb{R}$.

zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Como $D(f) = \mathbb{R}$, segue que f não possui assíntotas verticais.

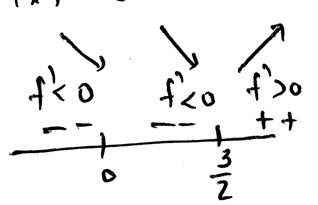
<u>MÁX/MÍN e CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO:</u>

Pontos críticos: onde $f'(x) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$.



POR EX.; SE $x = -1$; $f'(x) < 0$
POR EX; SE $x = 1$; $f'(x) < 0$
POR EX.; SE $x = 2$; $f'(x) > 0$

Assim, temos que:

- f é crescente em $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
- f é decrescente em $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$
- MÍN. $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$

<u>CONCAVIDADE e P.I.</u>:

$f''(x) = 12x^2 - 12x$.

$f''(x) = 0 \iff 12x^2 - 12x = 0 \iff 12x(x-1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou } x = 1. \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccc} f''>0 & & f''<0 & & f''>0 \\ + & | & - & | & + \\ & 0 & & 1 & \\ \text{C.P.C.} & & \text{C.P.B.} & & \text{C.P.C.} \end{array}$$

POR EX.: SE $x = -1$, $f''(x) > 0$
POR EX.: SE $x = \frac{1}{2}$; $f''(x) < 0$
POR EX.: SE $x = 2$; $f''(x) > 0$

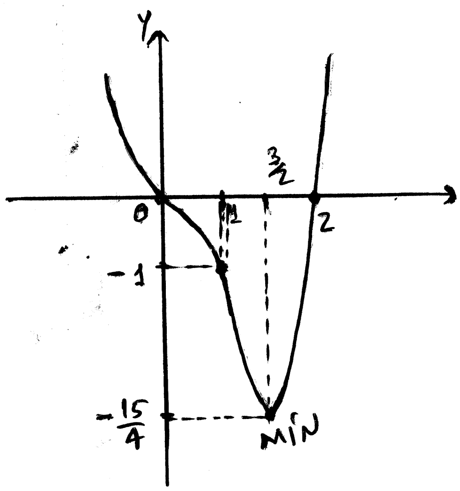
Como $\exists\, f'(x)$, $\forall x$ (pois f é derivável em $\mathbb{R}$), segue que existem P.I. $(0, f(0))$ e P.I. $(1, f(1))$, ou seja, temos dois pontos de inflexão:

$$(0, f(0)) = (0,0) \quad \text{e} \quad (1, f(1)) = (1, -1).$$

Além disso, temos que f possui:

- C.P.C. em $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
- C.P.B. em $(0, 1)$

Com o estudo feito acima, temos que o esboço gráfico de f será:



(b) $f(x) = x^3+5x^2+3x-4$. $D(f) = \mathbb{R}$. (logo, $\nexists$ assintotas verticais)

zeros: $f(x)=0 \iff x^3+5x^2+3x-4=0$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}+5x^2+3x-4 & x+4 \\ \cancel{-x^3}-4x^2 & \overline{x^2+x-1} \\ \hline \cancel{x^2}+3x-4 & \\ -\cancel{x^2}-4x & \\ \hline -x-\cancel{4} & \\ +x\cancel{+4} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Logo, temos que

$x^3+5x^2+3x-4 = (x+4).(x^2+x-1)=0$

$\iff x+4=0$ ou

$x^2+x-1=0$. Assim:

$x=-4$ ou $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$

$\iff x=-4$ ou $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

[ZEROS DE f].

CRESC / DECRESC. e MÁX./MÍN.:

$f'(x) = 3x^2+10x+3$

$f'(x)=0 \iff 3x^2+10x+3=0$

$\iff x = \dfrac{-10\pm\sqrt{100-36}}{6} = \dfrac{-10\pm 8}{6}$ $\begin{cases} x=-3 \\ x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$

	-3		$-\frac{1}{3}$	
$f'>0$ ↗		$f'<0$ ↘		$f'>0$ ↗
$+++$		$---$		$+++$

POR EX.; SE $x=-10$; $f'(x)>0$
POR EX.; SE $x=-1$; $f'(x)<0$
POR EX.; SE $x=0$; $f'(x)>0$

Logo, temos que:

- f é crescente em $(-\infty,-3)\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$
- f é decrescente em $(-3,-\frac{1}{3})$.
- f possui MÁX. $(-3, f(-3))$ e MÍN. $(-\frac{1}{3}, f(-\frac{1}{3}))$; ou seja:

  MÁX. $(-3,5)$ e MÍN. $(-\frac{1}{3}, -\frac{9}{2})$.

CONCAVIDADE E P.I.:

$f''(x) = 6x+10$. $f''(x)=0 \iff 6x+10=0 \iff x=-\frac{5}{3}$.

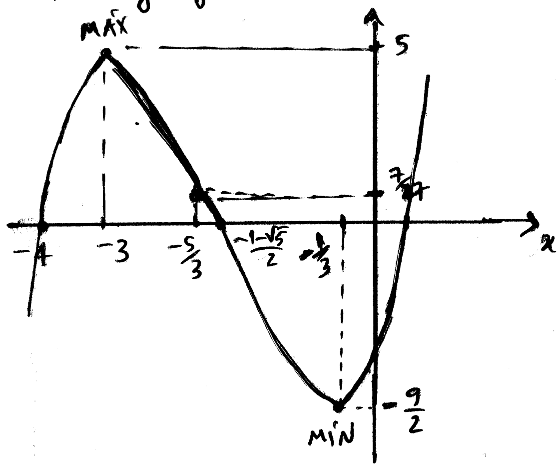
$$\begin{array}{cc} f''<0 & f''>0 \\ -- & ++ \\ \hline C.P.B & -\frac{5}{3} \quad C.P.C \end{array} \quad \begin{cases} \text{POR EX.; SE } x=-5;\ f''(x)<0 \\ \text{POR EX.; SE } x=0;\ f''(x)>0 \end{cases}$$

Como $\exists\, f'(x), \forall x$, segue que $\exists$ reta tangente em $x=-\frac{5}{3}$, por exemplo, e daí segue que $\exists$ P.I. $\left(-\frac{5}{3}, f\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = \left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{27}\right)$.

Além disso, temos que f possui:

- C.P.C. em $\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$
- C.P.B. em $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$.

Logo, o esboço gráfico de f será:



(c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x-3}$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Logo, temos uma assíntota vertical: $x=3$.

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2-x}{x-3} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2-x}{x-3} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2-x}{x-3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x}{x} = -1$. (ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y=-1$)

zeros de f: $f(x)=0 \iff \dfrac{2-x}{x-3} = 0 \iff \boxed{x=2}$.

CRESC / DECRESC. e MÁX./MÍN.:

$$f'(x) = \frac{(x-3)(-1) - (2-x)(1)}{(x-3)^2} = \frac{\cancel{-x} + 3 - 2 \cancel{+x}}{(x-3)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x-3)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ (ABSURDO!)}$$

$\nexists f'(x) \Leftrightarrow x = 3$ (seria outro ponto crítico, mas $x=3$ está fora do $D(f)$; e então não consideramos)

Logo, f não possui pontos de MÁX. e nem de MÍN.

Como $f'(x) = \frac{1}{(x-3)^2} > 0$, $\forall x \in D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, segue que f é crescente $\forall x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

CONCAVIDADE / P. I.:

$$f''(x) = -2(x-3)^{-3} \cdot (1) = -\frac{2}{(x-3)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x-3)^3} = 0 \Leftrightarrow -2 = 0 \text{ (ABSURDO!)}$$

Logo, f não possui P.I.

Porém, estudamos o sinal de f'':

$$\begin{array}{ccc} f''>0 & & f''<0 \\ +++ & | & --- \\ \text{C.P.C.} & 3 & \text{C.P.B} \end{array}$$

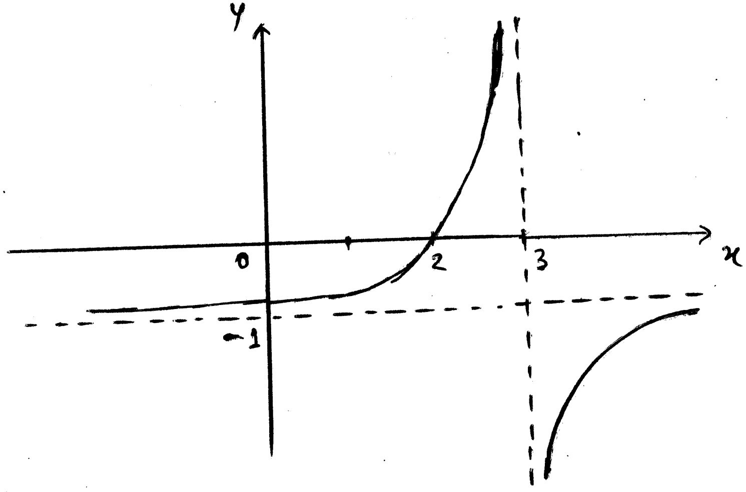
POR. EX.; SE $x = 0$; $f''(x) > 0$

POR EX.; SE $x = 5$; $f''(x) < 0$

Assim, temos que f possui C.P.C. em $(-\infty, 3)$ e C.P.B. em $(3, +\infty)$.

No entanto, em $x = 3$ não existe P.I.; pois $x = 3$ é uma assíntota vertical de f.

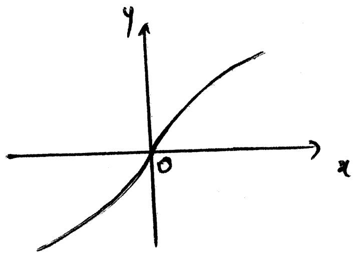
Assim, colocando todas as informações de f num gráfico, temos:



(e) Lembre do estudo das funções hiperbólicas que

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \text{arcsenh}\, x$, e então o

gráfico de f é o gráfico da função arco seno-hiperbólico:



Mas os comentários acima são apenas uma observação curiosa, não precisamos dela para resolver o problema. Vamos, assim, para a resolução propriamente dita:

Como $x + \sqrt{x^2+1} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, segue que $D(f) = \mathbb{R}$.

Logo, não existem assíntotas verticais.

obs.! $\left[\begin{array}{l} \text{COMO} \quad \sqrt{x^2+1} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \text{ TEMOS QUE} \\ -x \leq |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1} \implies x + \sqrt{x^2+1} > 0; \ \forall x. \end{array}\right.$

zeros de f:

$f(x) = 0 \iff x + \sqrt{x^2+1} = 1 \iff \sqrt{x^2+1} = 1 - x$

$\iff (\sqrt{x^2+1})^2 = (1-x)^2 \iff \cancel{x^2} + 1 = 1 - 2x + \cancel{x^2}$

$\iff 2x = 0 \iff \boxed{x = 0}$

Logo, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

CRESC / DECRESC e MÁX./MÍN.:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1} + x}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \quad \text{(ABSURDO!)}$$

Logo, f não possui pontos de MÁX. e de MÍN.

Porém, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, f é crescente em $\mathbb{R}$.

$+ + + + +$

$f' > 0, \forall x$

CONCAVIDADE / P.I.:

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$ CANDIDATO A P.I.:

Estudo do sinal de f'':

$f'' > 0$ $\quad$ $f'' < 0$

$+ + +$ $\quad$ $- - -$

C.P.C $\quad 0 \quad$ C.P.B

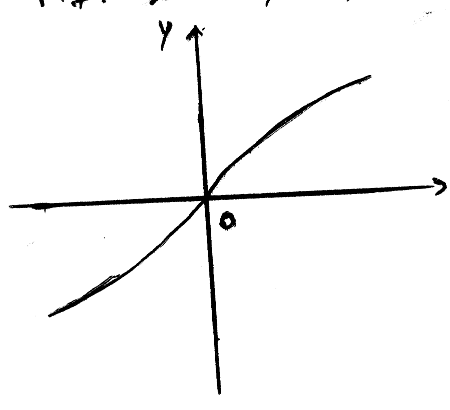
POR EX.; SE $x = -1$; $f''(x) > 0$

POR EX.; SE $x = 1$; $f''(x) < 0$

C.P.C. em $(-\infty, 0)$ e C.P.B em $(0, +\infty)$.

Temos também P.I. em $(0, f(0)) = (0, \ln(0+1)) = (0,0)$

Gráfico de f:



(g) $f(x) = (1-x)\cdot x^{\frac{1}{5}}$

$D(f) = \mathbb{R}$. Logo, f não possui assíntotas verticais.

zeros: $f(x) = 0 \iff (1-x)\cdot x^{\frac{1}{5}} = 0 \iff x = 1$ ou $x = 0$.

CRESC/DECRESC. e MÁX/MÍN.:

$$f'(x) = (1-x)\cdot\frac{1}{5}\cdot x^{-\frac{4}{5}} + (-1)\cdot x^{\frac{1}{5}} = \frac{1-x}{5\,x^{\frac{4}{5}}} - x^{\frac{1}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{1-x-5\cdot x^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}}{5\,x^{\frac{4}{5}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x-5x}{5\,x^{4/5}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1-4x}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$ (note que em $x=0$, f não tem derivada)

Pontos críticos: onde $f'(x) = 0$ e onde $\nexists\ f'(x)$.

- $f'(x) = 0 \iff 1-4x = 0 \iff x = \frac{1}{4}$
- $\nexists\ f'(x) \iff x = 0$;

	$x<0$	$0<x<\frac{1}{4}$	$x>\frac{1}{4}$
	$f'>0$	$f'>0$	$f'<0$
	$++$	$++$	$--$

$\left\{\begin{array}{l} \text{POR EX.; SE } x=-1;\ f'(x)>0 \\ \text{POR EX.; SE } x=\frac{1}{8};\ f'(x)>0 \\ \text{POR. EX.; SE } x=1;\ f'(x)<0 \end{array}\right.$

Logo, f é crescente em $(-\infty, \frac{1}{4})$ e

f é decrescente em $(\frac{1}{4}, +\infty)$.

Além disso, f possui um ponto de MÁX. $\left(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4})\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3\sqrt[5]{4}}{4}\right)$.

CONCAVIDADE E P.I.:

$$f''(x) = \frac{5\cdot x^{\frac{4}{5}}\cdot(-4) - (1-4x)\cdot \cancel{5}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}x^{-\frac{1}{5}}\cdot 1}{\left(5\cdot x^{\frac{4}{5}}\right)^2} = \frac{-20x^{\frac{4}{5}} - 4x^{-\frac{1}{5}} + 16x^{\frac{4}{5}}}{25\,x^{\frac{8}{5}}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x^{\frac{4}{5}} - 4x^{-\frac{1}{5}}}{25\,x^{\frac{8}{5}}} = \frac{-4\cdot\left(x^{\frac{4}{5}} + x^{-\frac{1}{5}}\right)}{25\,x^{\frac{8}{5}}} =$$

$$= \frac{-4\cdot\left(x^{\frac{4}{5}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\right)}{25\,x^{\frac{8}{5}}} = \frac{-4\cdot\left(\frac{x+1}{x^{\frac{1}{5}}}\right)}{25\,x^{\frac{8}{5}}}$$

$$= \frac{-4(x+1)}{25\,x^{\frac{9}{5}}}$$

$$f''(x) = 0 \iff -4(x+1) = 0 \iff x = -1.$$

$f''<0$ $f''<0$

$- -$ $- - 0 -$

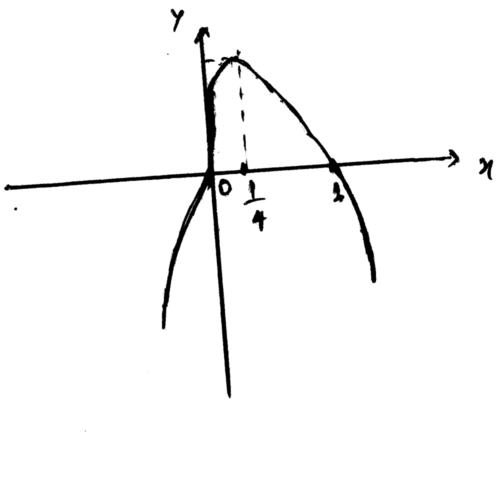
-1 0

POR EX.: SE $x=-2$; $f''(x) < 0$

POR EX.: SE $x = 10$; $f''(x) < 0$

Logo, não tem P.I.

Notamos pelo estudo do sinal de f'' que f possui C.P.B em todo o seu domínio. Esboço gráfico de f:



(m) $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} \cdot (x-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(x+1)^2} \cdot \sqrt[3]{(x-2)}$.

$D(f) = \mathbb{R}$. Logo, f não possui assíntotas verticais.

zeros: $f(x) = 0 \iff (x+1)^{\frac{2}{3}} \cdot (x-2)^{\frac{1}{3}} = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$.

CRESC / DECRESC. e MÁX / MÍN.!

Pontos críticos: onde $f'(x) = 0$ ou onde $\nexists f'(x)$:

$$f'(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot (x-2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{3}} \cdot (x-2)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}.$$ Assim, temos que:

- $\nexists f'(x) \iff x = 2$ ou $x = -1$.
- $f'(x) = 0 \iff \frac{1}{\cancel{3}}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{\cancel{3}}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\iff \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} = -2 \cdot \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}} \iff (x+1)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = -2(x-2)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$$

$$\iff x+1 = -2(x-2) \iff x+1 = -2x+4 \iff \boxed{x = 1}$$

Assim, estudando o sinal de f':

$f'>0$ | $f'<0$ | $f'>0$ | $f'>0$

$++$ | $---$ | $++$ | $++$

-1 1 2

POR EX.; SE $x = -2$; $f'(x) > 0$
POR EX.; SE $x = 0$; $f'(x) < 0$
POR EX.; SE $x = \frac{1}{2}$; $f'(x) > 0$
POR EX.; SE $x = 3$; $f'(x) > 0$.

Logo, temos que f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, e é decrescente em $(-1, 1)$. Além disso, temos que:

Existem pontos de MÁX $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$; e
MÍN. $(1, f(1)) = (1, -\sqrt[3]{4})$.

CONCAVIDADE E P. I.:

$$f''(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{(x-2)\cdot 1-(x+1)\cdot 1}{(x-2)^2} +$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{(x+1)\cdot 1-(x-2)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}\cdot\frac{(x+1)^{-\frac{1}{3}}}{(x-2)^{-\frac{1}{3}}}\cdot\frac{-3}{(x-2)^2}+\frac{2}{9}\cdot\frac{(x-2)^{-\frac{2}{3}}}{(x+1)^{-\frac{2}{3}}}\cdot\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{(x+1)^{-\frac{1}{3}}}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{(x-2)^{-\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{4}{3}}}.$$ Assim:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \cancel{\frac{2}{3}}\cdot\frac{(x+1)^{-\frac{1}{3}}}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}=\cancel{\frac{2}{3}}\cdot\frac{(x-2)^{-\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=(x-2)^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x+1=x-2$$

$\Leftrightarrow 1=-2$. (Absurdo!) Logo, $\nexists$ P.I..

Estudo do sinal de f'': ver onde $\nexists f''(x) \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=2$.

$f''>0$ (+ +) | -1 | $f''>0$ (+ +) | 2 | $f''<0$ (− −)

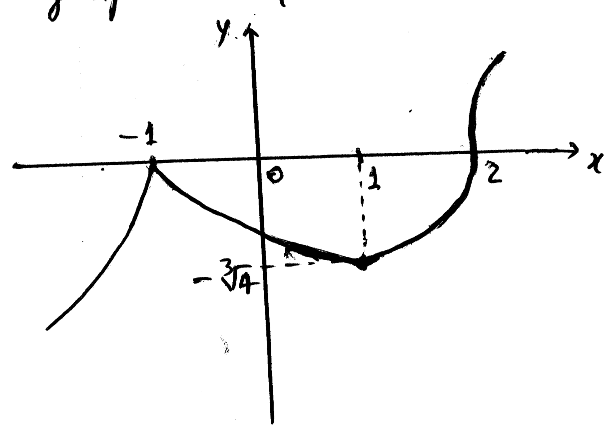
C.P.C | C.P.C | C.P.B

- SE $x=0$; $f''(x)>0$
- SE $x=3$; $f''(x)<0$
- SE $x=-2$; $f''(x)>0$

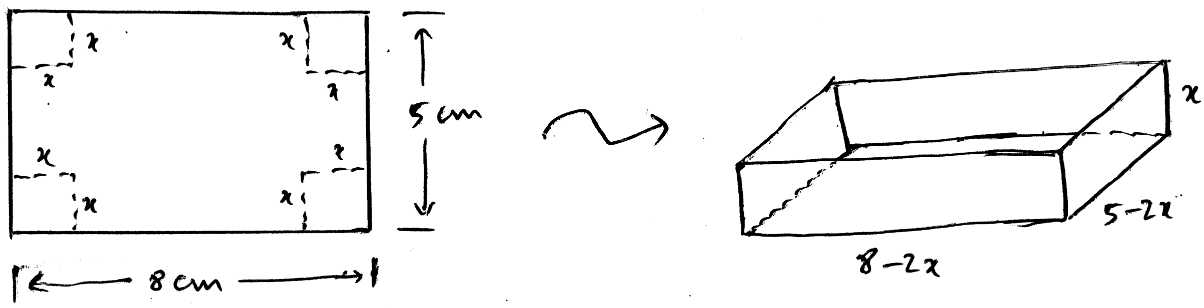
Assim, f é tal que possui:

C.P.C. em $(-\infty, 2)$ e C.P.B. em $(2,+\infty)$.

Esboço gráfico de f:



17)



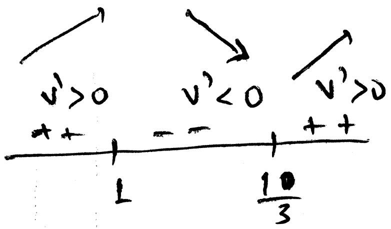
Achar o valor de x para que $V(x)$ seja máximo, onde

$$V(x) = (8-2x).(5-2x).x = \cdots = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40$$

PONTOS CRÍTICOS: $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 52x + 40 = 0 \quad (\div 4)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 13x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{10}{3}.$$



POR EX.; SE $x=0$; $V'(x)>0$
POR EX.; SE $x=2$; $V'(x)<0$
POR EX.; SE $x=10$; $V'(x)>0$

Logo, o volume será máximo quando $x = 1$ cm.

---

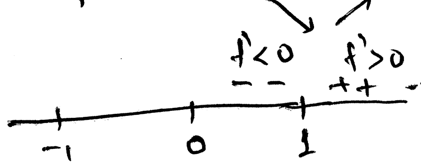
19) $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Achar x mínimo, $x>0$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- $\nexists f'(x) \Leftrightarrow x = 0$

} PONTOS CRÍTICOS.

Como queremos $x>0$, vamos ver se $x = +1$ dá mínimo:



POR EX.; SE $x=\frac{1}{2}$, $f'(x)<0$
POR EX.; SE $x=2$, $f'(x)>0$

Logo, a soma $x + \frac{1}{x}$ será mínima quando $x = 1$

---

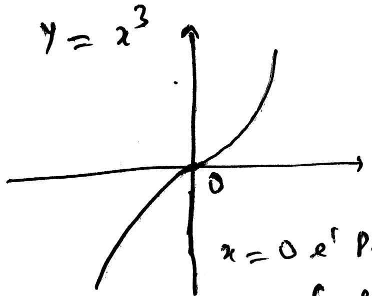
23) Basta notar que, sendo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, temos que

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + C \quad ; \text{ e}$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \text{ . Assim,}$$

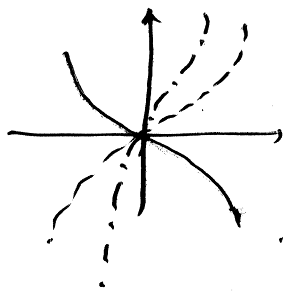
$$f''(x) = 0 \iff 6ax + 2b = 0 \iff \boxed{x = -\frac{b}{3a}}$$

Ex.: $y = x^3$



$x = 0$ é P.I.
(verifique!)

Em geral: $y = kx^3$, $k \neq 0$.



TODAS ESSAS TÊM P.I. EM $x = 0$.
