LISTA 07 — CÁLCULO 1. — PROF. MAURÍCIO ZAHN.

01)

(b) $f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & \text{se } x-2 < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} x-2, & \text{se } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{se } x < 2 \end{cases}$, em $x=2$.

1º: CONTINUIDADE EM $x=2$:

(i) $\exists f(2) = 2-2 = 0$

(ii) $¿\exists \lim_{x\to 2} f(x)$?

- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} -(x-2) = 0$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-2) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

$\Downarrow$

$\exists \lim_{x\to 2} f(x) = 0$

(iii) e como $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 0$, segue que f é contínua em $x=2$.

2º: DERIVABILIDADE EM $x=2$:

- $f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)-0}{x-2} = -1$
- $f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)-0}{x-2} = +1$

Como $f'_-(2) = -1 \neq 1 = f'_+(2)$, segue que f não é derivável em $x=2$.

03) Suponha que $\exists\ f'(a)$ (POIS f É DERIVÁVEL EM $x=a$).

Então:

$$\lim_{x\to a} \frac{x\cdot f(a) - a\cdot f(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x\cdot f(a) - a\cdot f(a) + a\cdot f(a) - a\cdot f(x)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(a)\cdot[x-a] + a\cdot[f(a)-f(x)]}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(a)\cdot(\cancel{x-a})}{\cancel{x-a}} - \frac{a\cdot(f(x)-f(a))}{x-a}$$

$$= f(a) - a\cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f(a) - a\cdot f'(a).$$

$\square$

---

04) — NÃO FAZER!

---

05) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Mostrar: $\exists\ f'(0)$.

Como $f(0) = 0^2 = 0$, temos

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} = x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \dfrac{0}{x} = 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Em qualquer dos casos,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

$\square$

---

06) $\alpha > 1$. e f é tal que $|f(x)| \leq |x|^\alpha$.

Mostrar: $\exists f'(0)$.

Note que, $\forall x$; $0 \leq |f(x)| \leq |x|^\alpha$. Em particular, tem-se:

$$0 \leq |f(0)| \leq |0|^\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}.$$

Assim; note que

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{|x|^\alpha}{|x|} = |x|^{\alpha - 1}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq |x|^{\alpha-1} \quad ; \quad \alpha - 1 > 0$$

Pelo T. do Sanduíche, fazendo $x \to 0$, obtemos

$$0 \leq \left| \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq |0|^{\alpha - 1} = 0$$

$$\Rightarrow \exists f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

$\square$

---

07) A ideia em todos os itens é obter a eq. da reta normal, que será:

$$y - y_p = m_n (x - x_p);$$

onde $m_n = -\dfrac{1}{m_t}$, i.e; $m_n = -\dfrac{1}{f'(x_p)}$.

ISSO VEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

08) $s(t) = 5 - \cos^2 t = 5 - (\cos t)^2$

$\Rightarrow v(t) = s'(t) = -2.(\cos t)^1.(-\operatorname{sen} t)$

$\Rightarrow v(t) = 2.\operatorname{sen} t.\cos t = \cos 2t$

IDENTIDADE TRIGONOMÉTRICA. (COSSENO DO ARCO DUPLO)

e:

$a(t) = v'(t) = (\cos 2t)' =$

$= -\operatorname{sen} 2t.\,2 = -2.\operatorname{sen} 2t$ $\square$

---

09) $s(t) = \operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$.

• $a(t)$, para $t = 4s = ?$

$v(t) = s'(t) = \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right).4 + \cos\left(4t + \frac{\pi}{6}\right).4$

$= 4.\left[\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\Rightarrow a(t) = v'(t) = 4.\left[-\operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{3}\right).4 - \operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{6}\right).4\right]$

$\Rightarrow a(t) = -16.\left(\operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

$a(4) = -16.\left(\operatorname{sen}\left(16 + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(16 + \frac{\pi}{6}\right)\right)\ m/s^2$.

---

12) (d) $f(x) = \ln(4x^3 - 2x^2) = \ln v.$

$v = 4x^3 - 2x^2$

$\Rightarrow v' = 12x^2 - 4x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{v'}{v}$$

$$f'(x) = \frac{12x^2 - 4x}{4x^3 - 2x^2}$$

$$= \frac{4\cancel{x}(3x-1)}{2x^{\cancel{2}}(2x-1)} = \frac{2(3x-1)}{2x-1}$$

(e) $f(x) = (1 - 2x^2 - x^3) . \ln(x^3 - x - 1) = u . v$

$$\begin{cases} u = 1 - 2x^2 - x^3 \Rightarrow u' = -4x - 3x^2 \\ v = \ln(x^3 - x - 1) \Rightarrow v' = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x - 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = u . v' + u' . v$$

$$= (1 - 2x^2 - x^3) . \frac{(3x^2 - 1)}{x^3 - x - 1} + (-4x - 3x^2) . \ln(x^3 - x - 1)$$

(f) $f(x) = \ln \dfrac{3-2x}{x+1} = \ln(3-2x) - \ln(x+1)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{3-2x} - \frac{1}{x+1}$$

//

(g) $f(x) = e^{3x^2-1} = e^v \; ; \; v' = 6x$

$$\Rightarrow f'(x) = e^v . v' = e^{3x^2-1} . 6x = \underline{6x e^{3x^2-1}}$$