**Fundação Universidade Federal de Pelotas**
**Departamento de Matemática e Estatística**
**Curso de Licenciatura em Matemática**
**Segunda Prova de Análise Real II**
**Prof. Dr. Maurício Zahn**

**Nome:** **Data:** 17/03/2017.

*"Há dois labirintos do espírito humano: um respeita a composição do contínuo, o outro a natureza da liberdade; e ambos têm origem no mesmo infinito."*
Leibniz

**Questão 01.** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, ponha $m = \dfrac{a+b}{2}$ e prove que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a} \int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]dx.$$

**Questão 02.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se $\displaystyle\int_x^y f(t)dt = 0$, para quaisquer $x, y \in [a, b]$, então $f(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$.

**Questão 03.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável. Se $f(a) = 0$ e $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, mostre que

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2}.$$

**Questão 04.** Se $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$, mostre que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + r(x),$$

onde

$$|r(x)| \leq \frac{1}{5! \cdot 2^5}.$$

**Questão 05.** Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n n!}{n^n}$, onde $k > 0$. Prove que essa série converge se $k < e$ e diverge se $k > e$.

**Questão 06.** Considere a sequência de funções $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}.$$

Determine a função limite $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ e verifique se $f_n \to f$ uniformemente.