Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 7 de Exercícios

1. Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Prove as seguintes afirmações:

   (a) Se $u \geq 0$ e $v \geq 0$, então $uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$.

   (b) Se f e g são Riemann integráveis em $[a,b]$ com $f,g \geq 0$, e $\int_a^b f^p dx = 1 = \int_a^b g^q dx$, então
   $$\int_a^b fg\,dx \leq 1.$$

   (c) Se f e g são Riemann integráveis em $[a,b]$, então
   $$\left|\int_a^b fg\,dx\right| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   Tal desigualdade é chamada de *Desigualdade de Hölder* para integrais. Quando $p=q=2$ é chamada de Desigualdades de Cauchy-Schwarz.

   (d) Suponha que f' é integrável em $[0,1]$ e $f(0)=0$. Prove que para todo $x \in [0,1]$ temos
   $$|f(x)| \leq \sqrt{\int_0^1 |f'(t)|^2 dt}.$$

Solução.

(a) Trata-se da desiqualdade de Young. Como $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=e^x$ é convexa, temos que
$$u\cdot v = e^{\ln(u\cdot v)} = e^{\ln v + \ln v} = e^{\frac{p}{p}\ln u + \frac{q}{q}\ln v} =$$
$$= e^{\frac{1}{p}\ln u^p + \frac{1}{q}\ln v^q} = f(\frac{1}{p}\ln u^p + \frac{1}{q}\ln v^q),$$
e como $f(x)=e^x$ é convexa e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, segue que
$$u\cdot v = f(\frac{1}{p}\ln u^p + \frac{1}{q}\ln v^q) \leq \frac{1}{p}f(\ln u^p)+\frac{1}{q}f(\ln v^q) = \frac{1}{p}e^{\ln u^p}+\frac{1}{q}e^{\ln v^q} = \frac{1}{p}u^p+\frac{1}{q}v^q.$$

(b) Sejam $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integráveis tais que $f,g\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$. Usando $u=f$ e $v=g$, da desigualdade do item (a), obtemos
$$f\cdot g \leq \frac{f^p}{p}+\frac{g^q}{q}.$$
Integrando em $[a,b]$, obtemos
$$\int_a^b f\cdot g\,dx \leq \int_a^b \left(\frac{f^p}{p}+\frac{g^q}{q}\right)dx = \frac{1}{p}\int_a^b f^p dx + \frac{1}{q}\int_a^b g^q dx,$$
e como $\int_a^b f^p dx = 1 = \int_a^b g^q dx$, o resultado segue.

(c) Considere agora $u = \frac{|f|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \geq 0$ e $v = \frac{|g|}{\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \geq 0$.

Aplicando a desigualdade de (a), segue:

$$\frac{|f|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|g|}{\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\left(\frac{|f|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{|g|}{\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^q}{q}.$$

Logo,

$$\frac{|f \cdot g|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f|^p}{\int_a^b |f|^p} \cdot \frac{1}{p} + \frac{|g|^q}{\int_a^b |g|^q} \cdot \frac{1}{q}.$$

Integrando em $[a, b]$ e notando que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, o resultado segue.

(d) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para qualquer $x \in [0, 1]$ temos $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$ (pois $f(0) = 0$). Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz estabelecida no item anterior (i.e., quando $p = q = 2$),

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)dt\right| = \left|\int_0^x f'(t) \cdot 1dt\right| \leq \sqrt{\int_0^x f'(t)^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^x 1^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\int_0^x f'(t)^2 dt} \cdot \sqrt{x} \leq \sqrt{\int_0^x f'(t)^2 dt}.$$

2. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona, derivável com f' integrável e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que $\exists\, c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g + f(b) \int_c^b g.$$

Solução. Defina $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Logo, por Teorema segue que G é contínua e derivável com $G' = g$. Pelo Teorema da integração por partes, vem (note que $G(a) = 0$):

$$\int_a^b fg = \int_a^b fG' = f \cdot G|_a^b - \int_a^b f'G. \tag{1}$$

Vamos analisar a integral $\int_a^b f' \cdot G$ da igualdade acima. Note que por hipótese temos que f é monótona. Sem perda de generalidade, assuma que f seja crescente. Como f também é derivável, tem-se que $f' > 0$, $\forall x \in [a, b]$. Além disso, sendo f' e G contínuas em $[a, b]$, por um dos Teoremas do valor médio para integrais estudado (Teorema 3.29), segue que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f'G = G(c) \int_a^b f' = G(c)[f(b) - f(a)]. \tag{2}$$

Juntando (1) e (2), obtemos

$$\int_a^b fg = f(b)G(b) - G(c)(f(b) - f(a)).$$

Logo,

$$\int_a^b fg = f(a)G(c) + f(b)[G(b) - G(c)] = f(a) \int_a^c g + f(b) \left[\int_a^b g - \int_a^c g\right] =$$

$$= f(a) \int_a^c g + f(b) \int_c^b g.$$

3. **(Função Beta de Euler)** Mostre que

$$B(m,n) := \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \ \forall m,n \in \mathbb{N}.$$

Dica: Use integração por partes repetidamente, primeiramente notando que $B(m,n) = \frac{n-1}{m}B(m+1,n-1)$.

4. Mostre que a fórmula de Taylor com resto integral pode ser escrita como: seja f uma função $n+1$ vezes derivável em um aberto I com $f^{(n+1)}$ integrável em todo subintervalo de I. Seja $a \in I$. Então, dado $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

onde

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Em seguida, mostre que se $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ para todo t entre a e x, então o resto integral $R_n(x)$ satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

5. Se $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$, mostre que $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + r(x)$, onde $|r(x)| \leq \dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$.

Solução. Observe que $f(x) = \operatorname{sen} x = f^{(4)}(x)$; $f'(x) = \cos x = f^{(5)}(x)$; $f''(x) = \operatorname{sen} x$; $f'''(x) = -\cos x$.

Pela Fórmula de Taylor com resto integral, na forma apresentada no exercício anterior, temos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + r(x),$$

onde

$$r(x) = \frac{1}{4!}\int_a^x f^{(5)}(t)(x-t)^4 dt.$$

Para $a = 0$ teremos $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, e então vamos obter

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + r(x),$$

com

$$|r(x)| = \left|\frac{1}{4!}\int_0^x \cos t(x-t)^4 dt\right| \leq \frac{1}{4!}\int_0^x |x-t|^4 dt,$$

e como $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, obtemos

$$|r(x)| \leq \frac{1}{4!}\left.\frac{(t-x)^5}{5}\right|_0^x = \frac{1}{5!}(-0+x^5) = \frac{1}{5!}x^5 \leq \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

6. Seja $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função com derivada segunda contínua e tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$. Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
(Sugestão: Utilize a fórmula de Taylor com resto integral para avaliar).

7. Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ e $c_1 < c_2$. Em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ destaque um ponto x_i qualquer, determinando assim uma partição pontilhada P^* pelos x_i. Se u pertence ao subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ e $c_1 \leq x_i \leq c_2$, mostre que

$$c_1 - ||P|| \leq u \leq c_2 + ||P||.$$

Solução. Temos que $u \in [t_{i-1}, t_i]$, então segue que $t_{i-1} \leq u$ e é tal que

$$c_1 \leq x_i \leq t_i \leq t_{i-1} + ||P||.$$

Logo, $c_1 \leq t_{i-1} + ||P||$, e subtraindo $||P||$, vem

$$c_1 - ||P|| \leq t_{i-1} \leq u,$$

ou seja,

$$c_1 - ||P|| \leq u. \tag{3}$$

Além disso, temos que $u \leq t_i$, e também temos

$$t_i - ||P|| \leq t_{i-1} \leq t_i \leq c_2,$$

e então somando $||P||$ vamos obter a desigualdade $t_i \leq c_2 + ||P||$, e como $u \leq t_i$, concluímos que

$$u \leq c_2 + ||P||. \tag{4}$$

Juntando (3) e (4), segue o resultado.

8. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Para toda partição $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ de $[a, b]$ sejam $P^* = (P; \xi)$ e $P^\# = (P, \eta)$ pontilhamentos de P. Prove que

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum f(\xi_i) g(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Solução. Basta observar que

$$\sum f(\xi_i)g(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum f(\xi_i)g(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum f(\xi_i)(g(\eta_i) - g(\xi_i))(t_i - t_{i-1}).$$

O segundo somatório tende a zero quando $||P|| \to 0$ pois $|f(\xi_i)| \leq M$, para algum $M > 0$ (f é limitada).