Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 6 de Exercícios - Repostas

1. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, $\varphi : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to [a, b]$ derivável e $c \in [a, b]$. Prove que as afirmações a seguir são equivalentes:

   A. $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ para todo $t \in [a, b]$ e $\varphi(t_0) = c$.

   B. $\varphi(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(s))\, ds$ para todo $t \in [a, b]$.

   Solução. Suponha A, i.e., que $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ para todo $t \in [a, b]$ e $\varphi(t_0) = c$. Então, pelo T.F.C. segue que

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \varphi'(s) ds = \int_{t_0}^{t} f(\varphi(s)) ds,$$

   e como $\varphi(t_0) = c$, segue B.

   Reciprocamente, suponha B, ou seja, que $\varphi(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(s))\, ds$ para todo $t \in [a, b]$.

   Ponha $c = \varphi(t_0)$. Então

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(s)) ds.$$

   Sendo $\varphi : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to [a, b]$ derivável, temos que φ é contínua em $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Logo, $f \circ \varphi$ é contínua nesse intervalo. Assim, para todo $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, definindo

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} (f \circ \varphi)(s) ds,$$

   temos por Teorema que F é derivável com $F'(t) = (f \circ \varphi)(t)$, ou seja,

$$F'(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^{t} f(\varphi(s)) ds \right) = f(\varphi(t)).$$

   Assim, sendo φ derivável, e $\varphi(t) = \varphi(t_0) + F(t)$, teremos

$$\varphi'(t) = F'(t) = f(\varphi(t)).$$

2. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, ponha $m = \dfrac{a + b}{2}$ e prove que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b - a} \int_{a}^{b} [f(x) + (x - m) f'(x)]\, dx.$$

   Solução. Vamos analisar $\int_a^b [f(x) + (x - m) f'(x)] dx$:

$$\int_{a}^{b} [f(x) + (x - m) f'(x)] dx = \int_{a}^{b} f(x) dx + \int_{a}^{b} (x - m) f'(x) dx. \tag{1}$$

   Vamos aplicar o Teorema da integração por partes para a integral $\int_a^b (x - m) f'(x) dx$. Considerando $u = x - m$ e $dv = f'(x)dx$, vamos obter $du = dx$ e $v = f(x)$. Logo,

$$\int_{a}^{b} (x - m) f'(x) dx = (x - m) f(x)|_a^b - \int_{a}^{b} f(x) dx =$$

$$= (b-m)f(b) - (a-m)f(a) - \int_a^b f(x)dx = (b - \frac{a+b}{2})f(b) - (a - \frac{a+b}{2})f(a) - \int_a^b f(x)dx =$$

$$= \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \int_a^b f(x)dx,$$

ou seja, obtemos

$$\int_a^b (x-m)f'(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Juntando (1) e (2) obtemos

$$\int_a^b [f(x)+(x-m)f'(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \int_a^b f(x)dx,$$

e portanto, o resultado segue.

3. **(Sel. Mestrado UFRGS 2012/2)** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $x_0 \in (a,b)$.

   (a) Mostre que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(f(x_0)-\varepsilon)\delta \leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(y)dy \leq (f(x_0)+\varepsilon)\delta.$$

   (b) Usando (a), prove que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(y)dy}{h} = f(x_0).$$

Solução. (a) Como f é contínua em x_0, dado $\varepsilon > 0$, segue que $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall y$, $|y-x_0| < \delta$, implique em $|f(y)-f(x_0)| < \varepsilon$, ou seja, teremos

$$-\varepsilon < f(y) - f(x_0) < \varepsilon.$$

Somando $f(x_0)$ em toda a cadeia de desigualdades, vem:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(y) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Integrando em $[x_0, x_0+\delta]$, vem

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} (f(x_0)-\varepsilon)dy \leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(y)dy \leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} (f(x_0)+\varepsilon)dy,$$

e uma vez que $f(x_0)-\varepsilon$ e $f(x_0)+\varepsilon$ são constantes, o resultado do item (a) segue facilmente.

(b) Dado $\varepsilon > 0$. Pelo item (a), tomando $\delta = h > 0$, teremos

$$(f(x_0)-\varepsilon)h \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(y)dy \leq (f(x_0)+\varepsilon)h,$$

ou seja,

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(y)dy}{h} \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Logo, subtraindo $f(x_0)$ em toda a cadeia de desigualdades, obtemos

$$-\varepsilon \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(y)dy}{h} - f(x_0) \leq \varepsilon,$$

ou seja,

$$\left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(y)dy}{h} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon,$$

sempre que $h > 0$. Ou seja,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(y)dy}{h} = f(x_0).$$

4. **(Sel. Mestrado UFSM 2009/1)** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Sugestão. Tome uma primitiva de f e aplique o Teorema do Valor Médio.

5. **(Sel. Mestrado UFSM 2013/2)** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se $\int_x^y f(s)ds = 0$, $\forall x, y \in [a,b]$, então $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Solução. Dados $x, y \in [a,b]$ quaisquer, com $x \neq y$, segue por hipótese que $\int_x^y f(s)ds = 0$. Como f é contínua, pelo Teorema do Valor Médio para integrais segue que existe um c entre x e y tal que

$$\int_x^y f(s)ds = f(c)(y-x).$$

Então, por hipótese teremos

$$f(c)(y-x) = 0 \Rightarrow f(c) = 0,$$

e como tal igualdade vale para quaisquer escolhas de x e de y em $[a,b]$, cada qual determinará um $c \in [a,b]$ onde concluiremos que $f(c) = 0$, segue que $f(c) = 0$, $\forall c \in [a,b]$, o que conclui o exercício.

6. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para mostrar que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e periódica de período P, i.e., se $f(x+P) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então o valor de

$$\int_x^{x+P} f(t)dt$$

não depende de x.

7. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável com f' integrável. Se $f(a) = 0$ e $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, mostre que

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2}.$$

8. (a) Integrando por partes, mostre que

$$A_n := \int_1^n \ln x dx = n \ln n - n + 1.$$

(b) Se B_n é a soma superior da função $\ln x$ relativamente à partição $\{1, 2, ..., n\}$ do intervalo $[1,n]$, mostre que

$$A_n < B_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln n!.$$

(c) Uma melhor aproximação superior para a área A_n pode ser dada considerando-se, para cada $k = 2, ..., n$ a tangente ao gráfico de $y = \ln x$ pelo ponto $x = k - \frac{1}{2}$. O trapézio com base no intervalo $[k-1, k]$ do eixo x, com dois lados verticais e lado inclinado igual a essa tangente tem área $\ln(k - \frac{1}{2})$. Seja $C_n = \sum_k = 2^n \ln(k - \frac{1}{2})$ a soma das áreas desses trapézios. Mostre que $A_n < C_n < B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. **(Sel. Mestrado UFRGS 2015/2)** Defina a função $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$\log(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

(a) Mostre que

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^b \frac{1}{t} dt \quad \text{para } a, b > 0.$$

(b) Mostre que se $x, y > 0$, então $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(c) Se $x > 0$, então para todo número racional r temos $\log(x^r) = r \log(x)$.

Solução. (a) Faremos uma mudança de variável. Escreva $t = a \cdot u$. Logo, $dt = adu$. Além disso, quando $t = a$ teremos $u = 1$ e quando $t = ab$ teremos $u = b$, e então

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^b \frac{1}{au} adu = \int_1^b \frac{1}{u} du.$$

(b) Basta usar o item (a):

$$\log(x) + \log(y) = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt = \log(xy).$$

(c) Veja Corolário 1, pág. 276 do livro do Elon.

10. **(Sel. Mestrado UFRGS 2007/2)** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sua derivada de Lanczos, denotada por DLf, é a função real definida em cada ponto por meio do limite

$$DLf(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t f(x_0 + t) dt.$$

(a) Mostre que se f é diferenciável em x_0 então $DLf(x_0) = f'(x_0)$.

(b) Calcule a derivada de Lanczos de $f(x) = |x|$ quando $x_0 = 0$.