Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 8 de Exercícios - Resoluções

1. (a) Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

   (b) Use o item anterior para mostrar que $1 < \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$.

   Solução.
   (a) Basta efetuar a decomposição
   $$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$
   e considerar a soma parcial
   $$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
   Assim,
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

2. Dadas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, com $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1}$ e $b_n = \log(1 + \frac{1}{n})$, mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Calcule explicitamente as somas parciais s_n e t_n, respectivamente, dessas séries e mostre que $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$, logo, as séries dadas são divergentes.

3. Analisar a convergência das séries a seguir e determinar a sua soma.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

4. Para todo $p \in \mathbb{N}$ fixado, prove que a série
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$$
   converge.

   Solução. Basta aplicar o teste da razão. Basta notar que, para $p \in \mathbb{N}$ fixado,
   $$n(n+1)(n+2)\cdots(n+p) > n \cdot n \cdot n \cdots n = n^{p+1},$$
   e então
   $$\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)} < \frac{1}{n^{p+1}},$$
   e como a série hiper-harmônica $\sum \frac{1}{n^r}$ é convergente quando $r > 1$ (e no nosso caso $r = p+1 > 1$), segue pelo teste da comparação que a convergência da série $\sum \frac{1}{n^{p+1}}$ garante a convergência da série desejada.

5. **(Sel. Mestrado UFSM 2011/1)**

   (a) Considere duas sequências de números reais não-negativos (a_n) e (b_n) tais que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ para algum $c > 0$. Mostre que $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

(b) Use o resultado anterior para estudar a convergência das séries $\sum \dfrac{2n+1}{(n+1)^2}$ e $\sum \dfrac{1}{2^n-1}$.

6. Verificar se as séries a seguir são convergentes ou divergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n+2}{5n^3+3n}$

Solução.

(a) Tome a_n sendo o termo geral da série dada e $b_n = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, e use o Teorema do teste da comparação do limite para concluir.

(b) Usamos o teste da raiz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

logo, tal série é convergente.

(c) Usando o tese da razão vamos encontrar

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}}{\frac{n!}{e^n}} = \frac{(n+1)n!}{e^n \cdot e} \cdot \frac{e^n}{n!} = \frac{n+1}{e} \to \infty,$$

logo, a série é divergente.

(d) Aplique o teste da razão para concluir a convergência da série.

(e) Teste da razão.

7. Se $\sum a_n$ converge e $a_n > 0$, $\forall n$, mostre que as séries $\sum (a_n)^2$ e $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ também convergem.

Solução. Para que $\sum a_n$ seja convergente, com $a_n > 0$, para todo n, obrigatoriamente se tem que $0 < a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $(a_n)^2 < a_n$, $\forall n$. Como $\sum a_n$ converge, pelo Teste da comparação segue a convergência de $\sum (a_n)^2$.

Do mesmo modo, como

$$\frac{a_n}{1+a_n} < a_n, \ \forall n,$$

pelo mesmo teste segue a convergência da série $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$.

8. Prove que, para todo $a \in \mathbb{R}$, a série $a^2 + \dfrac{a^2}{1+a^2} + \dfrac{a^2}{(1+a^2)^2} + \cdots$ é convergente e calcule a sua soma.

9. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

10. Mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge. Sugestão: utilize o segundo limite notável: $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Solução. Aplicando o teste da razão, vamos obter

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{n}{n+1}-1\right)^n = \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}\cdot\frac{-1}{n+1}\cdot n}.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right]^{\frac{-n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1,$$

e poratanto a série é convergente.

11. Seja $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^n n!}{n^n}$, onde k é uma constante. Prove que s converge absolutamente se $|k| < e$ e diverge se $|k| > e$.

Solução. Aplicando o teste da razão

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{k^n\cdot n!}\right| = |k|\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Agora, basta proceder como no exercício anterior.

12. Sejam $a_n > 0$, para todo n, com $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Prove que $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n = 0$.

Solução. Como a série $\sum a_n$ é convergente, escreva

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Então, a sequência (s_N) das somas parciais, dada por

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

é limitada, onde s é uma cota superior. Assim,

$$0 \le \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n\right| = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{n} a_n\right| \le \frac{s}{N},$$

e como $\lim_{N\to\infty}\frac{s}{N} = 0$, pelo Teorema do Sanduíche aplicado à cadeia de desigualdades acima, o resultado segue.