

Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 9 de Exercícios - Sequências de funções

1. Prove que $f_n(x) = nx(1-x)^n$ converge simplesmente, porém não uniformemente, em $[0, 1]$, para a função identicamente nula.
2. Verifique se as sequências de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ em cada item a seguir converge simplesmente e uniformemente, para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada pelo limite das f_n .
 - (a) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$, com $X = [0, 1]$.
 - (b) $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(nx)$, $X = (0, +\infty)$.
 - (c) $f_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{n}$, $X = \mathbb{R}$.
 - (d) $f_n(x) = \sqrt{n^2x+n} - \sqrt{n^2x}$, $X = (0, +\infty)$.
3. Se $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$ simplesmente em X , prove que $f_n + g_n \rightarrow f + g$ simplesmente em X . O mesmo para $f_n g_n$.
4. Seja a sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$. Prove que (f_n) converge uniformemente para 0 mas a sequência das derivadas f'_n não converge em ponto algum do intervalo $[0, 1]$.
5. Mostre que a sequência de funções $g_n(x) = x + \frac{x^n}{n}$ converge uniformemente no intervalo $[0, 1]$ para uma função derivável g e a sequência das derivadas g'_n converge simplesmente em $[0, 1]$ mas g' não é igual a $\lim_{n \rightarrow \infty} g'_n$.
6. Sejam $(f_n), (g_n)$ sequências de funções limitadas em X que convergem uniformemente em X para f e g , respectivamente. Mostre que $(f_n g_n)$ converge uniformemente em X para fg .