Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Física e Bacharelado em Física
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios

1. Em cada item a seguir, determine se a função é contínua no ponto x_0 indicado e calcule as derivadas laterais em x_0. Decida se f é derivável ou não em x_0. Em seguida, determine a função derivada $f'(x)$.

   (a) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se} \quad x \leq -4 \\ -x-6, & \text{se} \quad x > -4 \end{cases}$ no ponto $x_0 = -4$.

   (b) $f(x) = |x-2|$ no ponto $x_0 = 2$.

   (c) $f(x) = \begin{cases} -x^{\frac{2}{3}}, & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^{\frac{2}{3}}, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$ no ponto $x_0 = 0$.

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no ponto $x_0 = 0$.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 3 - x, & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

   (a) Verifique se f é contínua em $x = 2$.

   (b) Verifique se f é derivável em $x = 2$.

   (c) Esboce os gráficos de f e f' num mesmo plano cartesiano e dê uma interpretação geométrica.

3. Prove que se $f(x)$ é derivável em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a).$$

4. Seja f a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   Use a definição de derivada para mostrar que existe $f'(0)$, mas que $f'(0) \neq \lim_{x \to 0} f'(x)$. (ou seja, a função derivada f' não é contínua em $x = 0$).

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \text{ racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ irracional} \end{cases}.$$

   Prove que f é derivável em $x = 0$.

6. Seja $\alpha > 1$. Se f é uma função tal que satisfaz $|f(x)| \leq |x|^\alpha$, prove que f é derivável em $x = 0$.

7. **Definição.** Chama-se *reta normal* ao gráfico de uma função f em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ a reta perpendicular à reta tangente a f em P, passando por este ponto.

   Por exemplo, sabemos que a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 0$ é o eixo horizontal ox, e então a reta normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no mesmo ponto $x_0 = 0$ será o eixo vertical oy.

   Com base na definição acima, determine em cada item abaixo a equação das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto indicado.

   (a) $f(x) = (2x^2 - 3x)^3$, em $x = 2$. (b) $f(x) = \ln(2x-1)$, em $x = 1$.

   (c) $f(x) = \dfrac{3-2x}{x+2}$, em $x = 1$. (d) $f(x) = \operatorname{sen}((3x-1)\pi) + \sqrt{x+1}$, em $x = 3$.

8. Uma partícula move-se ao longo de uma reta segundo a equação $s(t) = 5 - \cos^2 t$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s e a cm/s^2 forem, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula em t s, ache v e a em termos de s.

9. Uma partícula move-se ao longo de uma reta obedecendo à lei
$$s(t) = \operatorname{sen}(4t + \frac{\pi}{3}) + \operatorname{sen}(4t + \frac{\pi}{6}),$$
   onde s é expresso em metros e t em segundos. Qual a aceleração da partícula no instante de tempo $t = 4$ segundos?

10. Uma jamanta pega uma pista de saída de uma rodovia em $t = 0$. Sua posição depois de t segundos é dada por $s(t) = 84t - t^3$ metros, para $0 \leq t \leq 5$.

    (a) Qual é a velocidade da jamanta no momento em que pega a pista de saída?

    (b) Qual a sua aceleração em $t = 4s$?

11. Derivar a função $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \ln \tan \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$, simplificando a resposta ao máximo.

12. Calcule a derivada de cada função abaixo:

    (a) $f(x) = (3x^2 - 5x^3)^2$ (b) $f(x) = \dfrac{3x-4}{5x^2 - x + 1}$

    (c) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 2}$ (d) $f(x) = \ln(4x^3 - 2x^2)$

    (e) $f(x) = (1 - 2x^2 - x^3) \cdot \ln(x^3 - x - 1)$ (f) $f(x) = \ln \dfrac{3-2x}{x+1}$

    (g) $f(x) = e^{3x^2 - 1}$ (h) $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(2 - 3x)$

    (i) $f(x) = \operatorname{sen}(3x-2) \cdot \ln(x-1)$ (j) $f(x) = \tan(\ln(1-2x)) + \sqrt{x}$

    (k) $f(x) = \sec\left(\ln\left(\dfrac{1-2x}{3x+1}\right)\right)$ (ℓ) $f(x) = \tan\left(\cos\left(\ln\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}\right)\right)\right)$