Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática - Diurno
Segunda Prova de Cálculo I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Gabarito** **Data:** 28/10/2015.

"A natureza era para ele como um livro aberto, cujas letras ele podia ler sem esforço"
Albert Einstein, ao mencionar Isaac Newton.

Questão 01. Calcule a derivada da função $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen} x}$ pela definição e confirme o resultado pelas regras de derivação.

Solução. Pela definição de derivada, temos

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\operatorname{sen}(x+h)}-\sqrt{\operatorname{sen} x}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\operatorname{sen}(x+h)}-\sqrt{\operatorname{sen} x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{\operatorname{sen}(x+h)}+\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\sqrt{\operatorname{sen}(x+h)}+\sqrt{\operatorname{sen} x}}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h(\sqrt{\operatorname{sen}(x+h)}+\sqrt{\operatorname{sen} x})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h(\sqrt{\operatorname{sen}(x+h)}+\sqrt{\operatorname{sen} x})}=\frac{2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{2\frac{h}{2}(\sqrt{\operatorname{sen}(x+h)}+\sqrt{\operatorname{sen} x})}=\frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}+\sqrt{\operatorname{sen} x}}=$$

$$=\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}.$$

Pelas regras de derivação:

$$f'(x)=\left((\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{2}}\cos x=\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}.$$

Questão 02. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função real definida por

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\arctan\dfrac{1}{x-1}, & \text{se}\quad x\neq 1,\\ 0, \ \text{se}\ \ x=1\end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $x=1$.
Obs.: Lembre da Trigonometria que $\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$ e que $\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$.

(b) Verifique se f é derivável em $x=1$.

(c) Calcule $f'(x)$.

(d) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(0,\frac{\pi}{4})$.

Solução.
(a)

- $\exists f(1) = 0$.
- $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$: Vejamos os limites laterais:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x-1)\cdot \arctan\frac{1}{x-1} = 0\cdot\arctan(-\infty) = 0\cdot(-\frac{\pi}{2}) = 0;$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)\cdot \arctan\frac{1}{x-1} = 0\cdot\arctan(+\infty) = 0\cdot(+\frac{\pi}{2}) = 0.$$

  Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$, segue que existe o limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$.

Portanto, segue que f é contínua em $x = 1$.

(b) Calculando as derivadas laterais, obtemos

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h\cdot\arctan\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \arctan\frac{1}{h} = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2};$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h\cdot\arctan\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \arctan\frac{1}{h} = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, segue que f não é derivável em $x = 1$.

(c)

$$f'(x) = (x-1)\cdot\frac{-1(x-1)^{-2}\cdot 1}{1+\left(\frac{1}{x-1}\right)^2} + 1\cdot\arctan\frac{1}{x-1};\ x\neq 1.$$

Simplificando, obtemos

$$f'(x) = -\frac{x-1}{1+(x-1)^2} + \arctan\frac{1}{x-1},\ \ x\neq 1.$$

(d)

$$m = f'(0) = -\frac{(0-1)}{1+(0-1)^2} + \arctan\frac{1}{-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Logo, a equação da reta tangente ao gráfico de f em $P(0,\frac{\pi}{4})$ será

$$y - \frac{\pi}{4} = (\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4})(x-0) \Longrightarrow y = (\frac{2-\pi}{4})x + \frac{\pi}{4}.$$

Questão 03. Encontre a equação da reta tangente à curva de equação

$$x^2y + \sqrt{y} = x^2 + y^2$$

no ponto $P(2,1)$.

Solução. Derivando em x, obtemos

$$x^2\cdot y' + 2xy + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = 2x + 2y\cdot y'$$

$$\Rightarrow x^2y' - 2yy' + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 2x - 2xy \Longrightarrow y' = \frac{2x - 2xy}{x^2 - 2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}}.$$

Logo,

$$m = y'(P) = \frac{2(2) - 2(2)(1)}{(2)^2 - 2(1) + \frac{1}{2\sqrt{1}}} = 0,$$

e portanto, a equação da reta procurada será

$$y - y_P = m(x - x_P)$$
$$y - 1 = 0(x - 2) \Longrightarrow y = 1.$$

Questão 04. A lei do movimento de um objeto é dada por $s(t) = t - \ln(t^2 + 1)$, onde s é dado em metros e t em segundos. Determine a aceleração do objeto no instante em que o mesmo entrar em repouso.

Solução. Precisamos achar $a(t)$ quando $v(t) = 0$.

$$v(t) = s'(t) = 1 - \frac{2t}{t^2 + 1} = \frac{t^2 + 1 - 2t}{t^2 + 1} = \frac{(t-1)^2}{t^2 + 1}$$

Assim,

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t^2+1} = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Logo,

$$a(t) = 0 - \frac{(t^2+1) \cdot 2 - 2t \cdot (2t)}{(t^2+1)^2} = \frac{2(t^2 - 1)}{(t^2+1)^2},$$

e assim,

$$a(1) = \frac{2(1-1)}{4} = 0\,\mathrm{m/s^2}.$$

Questão 05. Calcule a derivada de cada função abaixo:

(a) $f(x) = \cos(1 - x) \cdot \ln(\sqrt{x^2 + 1}) - \tan \sqrt[3]{x}$.

(b) $f(x) = e^{\sec\left(\frac{1}{x-1}\right)}$.

(c) $f(x) = \sqrt{x^3 - \sqrt[3]{x^2} + x}$.

(d) $f(x) = \dfrac{x \cdot \ln x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Solução.
(a) $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos(1 - x) \cdot \ln(x^2 + 1) - \tan x^{\frac{1}{3}}$. Derivando, vem

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(1 - x) \cdot \ln(x^2 + 1) + \cos(1 - x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} - \sec^2 \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,(1 - x) \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{x}{x^2 + 1}\cos(1 - x) - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\sec^2 \sqrt[3]{x}.$$

(b) $f'(x) = e^{\sec\frac{1}{x-1}} \cdot \sec\dfrac{1}{x-1} \cdot \tan\dfrac{1}{x-1} \cdot (-1)(x-1)^{-2} \cdot 1 =$

$$= -\frac{e^{\sec\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} \cdot \sec\frac{1}{x-1} \cdot \tan\frac{1}{x-1}.$$

(c) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x^3 - \sqrt[3]{x^2} + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 1) = \dfrac{3x^2 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 1}{\sqrt{x^3 + \sqrt[3]{x^2} + x}}$.

(d)

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}(x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x) - x \cdot \ln x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{(\sqrt{1-x^2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}(1+\ln x) + \frac{x^2 \ln x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \ldots = \frac{1 - x^2 + \ln x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Questão 06. Derivar implicitamente em x a função: $\cosh(x+y^2) - \arctan\dfrac{y}{x} = \sqrt{xy} + 2$.

Solução. Derivando implicitamente em x, obtemos

$$\mathrm{senh}(x+y^2) \cdot (1 + 2yy') - \frac{\frac{xy' - 1 \cdot y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}(xy' + 1 \cdot y) + 0.$$

Logo,

$$\mathrm{senh}(x+y^2) + 2y\ \mathrm{senh}(x+y^2)y' - \frac{xy' - y}{x^2+y^2} = \frac{xy' + y}{2\sqrt{xy}},$$

ou seja,

$$2(x^2+y^2)\sqrt{xy} \cdot \mathrm{senh}(x+y^2) + 4y\sqrt{xy}\,\mathrm{senh}(x+y^2)y' - 2\sqrt{xy}(xy' - y) =$$

$$= (x^2+y^2)xy' + (x^2+y^2)y,$$

e portanto, isolando y', obtemos

$$y' = \frac{(x^2+y^2)y - 2y\sqrt{xy} - 2(x^2+y^2)\sqrt{xy}\ \mathrm{senh}(x+y^2)}{4y\sqrt{xy}\,\mathrm{senh}(x+y^2) - 2x\sqrt{xy} - (x^2+y^2)x}$$

Questão 07. Calcule $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ para a função f definida parametricamente por

$$x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Solução. A derivada procurada será

$$f'(x) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

onde

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t^2)(-2t) - (1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{-2t - 2t^3 - 2t + 2t^3}{(1+t^2)^2} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2},$$

e

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^2) \cdot 2 - 2t(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{2 + 2t^2 - 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2 - 2t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Logo,

$$f'(x) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{(1+t^2)^2}{2 - 2t^2} = -\frac{4t}{2(1-t^2)} = -\frac{2t}{1-t^2}.$$

Obs.: Note que $1 - t^2 = (1+t^2)y$ e que $\dfrac{2t}{x} = 1 + t^2$, segue que

$$1 - t^2 = 2t \cdot \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{2t}{1-t^2} = \frac{x}{y},$$

e daí

$$f'(x) = \frac{x}{y}.$$

Questão 08. Usando a fórmula de Leibniz, calcule $\dfrac{d^5}{dx^5}f$, onde $f(x) = (x^3 - x^2) \cdot e^x$.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} u &= x^3 - x^2; \\ u^{(1)} &= 3x^2 - 2x; \\ u^{(2)} &= 6x - 2; \ , \\ u^{(3)} &= 6; \\ u^{(4)} &= u^{(5)} = 0, \end{aligned}$$

e que

$$v = v^{(1)} = v^{(2)} = ... = v^{(5)} = e^x.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(5)} &= \binom{5}{0} u^{(5)}v^{(0)} + \binom{5}{1} u^{(4)}v^{(1)} + \binom{5}{2} u^{(3)}v^{(2)} + \binom{5}{3} u^{(2)}v^{(3)} + \binom{5}{4} u^{(1)}v^{(4)} + \binom{5}{5} u^{(0)}v^{(5)} \\ &= 60e^x + 20(3x-1)e^x + 5(3x^2 - 2x)e^x + (x^3 - x^2)e^x = (x^3 + 14x^2 - 7x + 59)e^x. \end{aligned}$$