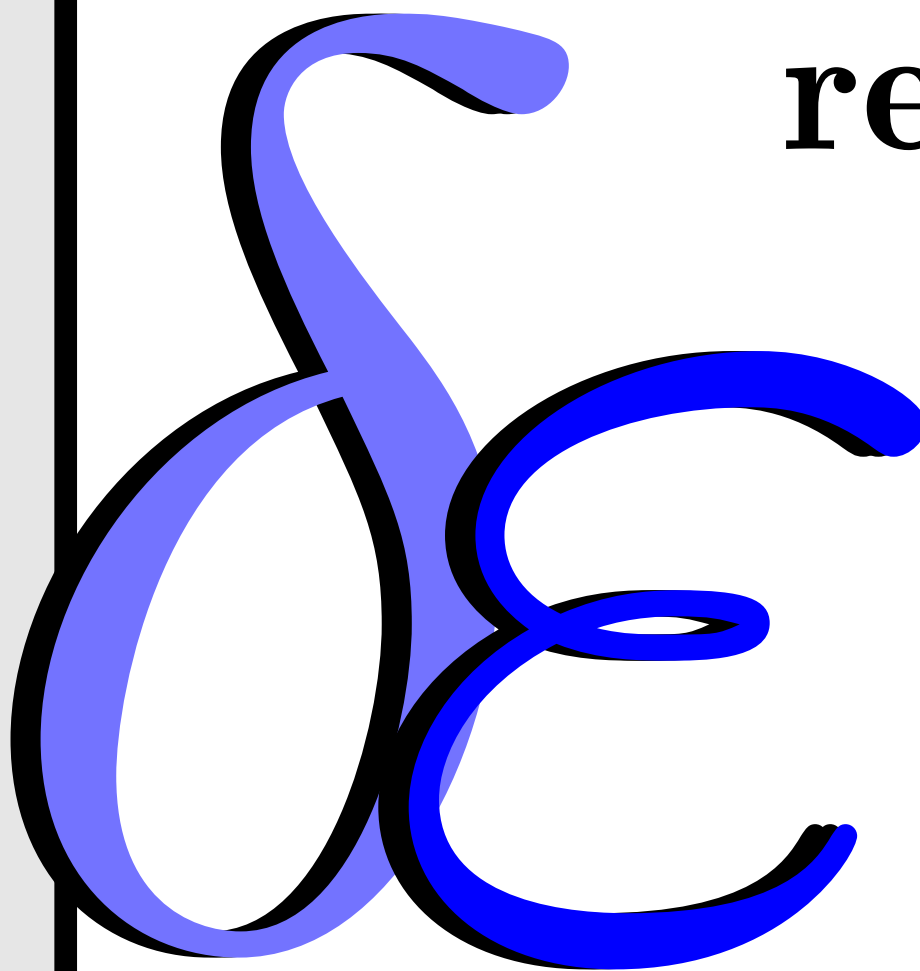




Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

curso de análise real



Cassio Neri

Curso de Análise Real

Cassio Neri

Instituto de Matemática - UFRJ
Rio de Janeiro - RJ - Brasil
2006

*Sai che ti avverrà,
praticando il disegnare di penna?
che ti farà sperto, pratico,
e capace di molto disegno entro la testa tua.*

Sabe o que te acontecerá, praticando o desenho a pena?
tornar-te-ás perito, práctico,
e capaz de muitos desenhos dentro de tua mente.

- Cennino Cennini da Colle di Valdelsa
Il Libro dell'arte (1437) - Cap. XIII.

Sumário

1	Noções de Teoria dos Conjuntos	1
1.1	Conjuntos e elementos.	1
1.2	Operações com conjuntos.	3
1.3	Simplificando a escrita.	5
1.4	Teoria dos Conjuntos é fácil?	5
1.5	Funções.	6
1.6	Famílias	9
1.7	Exercícios.	10
2	Números naturais, inteiros e racionais	13
2.1	Números naturais e inteiros.	13
2.2	Conjuntos finitos, enumeráveis e não enumeráveis.	15
2.3	Números racionais: operações e enumerabilidade.	19
2.4	Números racionais: ordem.	22
2.5	Números racionais: propriedade arquimediana.	23
2.6	Exercícios.	23
3	Números reais	27
3.1	A polêmica descoberta dos incomensuráveis.	27
3.2	★ Cortes de Dedekind.	28
3.3	Números reais.	39
3.4	Exercícios.	42

4	Seqüências e séries	45
4.1	Seqüências e subseqüências.	45
4.2	Seqüências convergentes.	46
4.3	Seqüências monótonas e seqüências limitadas.	49
4.4	Seqüências de Cauchy.	50
4.5	Limites infinitos.	51
4.6	Operações com limites.	52
4.7	★ Limite superior e limite inferior.	54
4.8	Séries.	55
4.9	★ A série dos inversos dos primos.	60
4.10	Exercícios.	61
5	Topologia de \mathbb{R}	65
5.1	Introdução.	65
5.2	Pontos interiores e conjuntos abertos.	66
5.3	Pontos de aderência e conjuntos fechados.	67
5.4	Conjuntos compactos.	69
5.5	Conjuntos densos.	71
5.6	Exercícios.	72
6	Limite e continuidade	75
6.1	Limite de funções.	75
6.2	Os quinze tipos de limite.	79
6.3	Funções contínuas.	80
6.4	O Teorema do Valor Intermediário.	82
6.5	Funções contínuas definidas em compactos.	83
6.6	★ Pontos fixos para funções contínuas.	85
6.7	Exercícios.	87
7	Derivada	91
7.1	Derivabilidade e derivada.	91

7.2	Propriedades operatórias.	94
7.3	Extremos locais e o Teorema do Valor Médio.	97
7.4	Derivadas de ordem superior e Fórmulas de Taylor.	100
7.5	★ O Método de Newton.	104
7.6	★ Regras de L'Hospital.	105
7.7	Exercícios.	107
8	Integral de Riemann	111
8.1	Somas superiores e inferiores.	111
8.2	Integral e funções integráveis.	114
8.3	Os Teoremas Fundamentais do Cálculo.	122
8.4	Mudança de variáveis e integração por partes.	125
8.5	O Teorema de Lebesgue.	125
8.6	Exercícios.	130
9	Seqüências de funções	133
9.1	Convergência simples.	133
9.2	Convergência uniforme.	134
9.3	Continuidade.	134
9.4	Integral.	135
9.5	Derivada.	136
9.6	O espaço $C(K)$	137
9.7	★ Equações diferenciais.	141
9.8	Exercícios.	145
	Bibliografia	147
	Índice	149

Capítulo 1

Noções de Teoria dos Conjuntos

1.1 Conjuntos e elementos.

A noção intuitiva que se tem da palavra conjunto nos é satisfatória e uma apresentação rigorosa da Teoria dos Conjuntos é difícil e além dos objetivos do curso.

DEFINIÇÃO 1.1. Um **conjunto** é constituído de objetos chamados **elementos**. Usamos a notação $x \in A$ (lê-se x pertence a A) para dizer que x é um elemento do conjunto A . Se x não é um elemento de A , então escrevemos $x \notin A$ (lê-se x não pertence a A).

Uma forma de caracterizar um conjunto é através da lista dos seus elementos, escrevendo-os separados por vírgulas “,” no interior de duas chaves “{” e “}”.

EXEMPLO 1.2. Seja A o conjunto cujos elementos são os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Escrevemos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Temos $1 \in A$, $2 \in A$ e $7 \notin A$.

Outra maneira de caracterizar um conjunto é através de uma propriedade P possuída por todos os seus elementos e apenas por estes (mais adiante faremos algumas considerações sobre isto). Escrevemos neste caso $\{x ; P(x)\}$, $\{x \mid P(x)\}$ ou $\{x : P(x)\}$ (lê-se o conjunto dos elementos x tais que $P(x)$ é verdadeira, ou ainda, dos elementos x que possuem a propriedade P). Salientamos que a letra x é arbitrária de modo que $\{x ; P(x)\} = \{y ; P(y)\}$.

EXEMPLO 1.3. Seja P a propriedade “é um número presente na face de um dado” e seja $A = \{x ; P(x)\}$. Então $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, i.e.¹, A é o mesmo conjunto do Exemplo 1.2.

DEFINIÇÃO 1.4. Dizemos que A é um **subconjunto** de B ou que A é uma **parte** de B , ou ainda, que A **está contido em** B e escrevemos $A \subset B$ se todo elemento de A pertence a

¹i.e., abreviação de “*id est*” que, em latim, significa “isto é”.

B . Dizemos também que B **contém** A e escrevemos $B \supset A$. Quando $A \subset B$ e $B \subset A$, os conjuntos A e B são ditos **iguais** e escrevemos $A = B$. Caso contrário eles são **diferentes** e escrevemos $A \neq B$. A notação $A \subsetneq B$ (ou $B \supsetneq A$) é uma abreviação para $A \subset B$ com $A \neq B$, neste caso dizemos que A é um **subconjunto próprio** de B .

EXEMPLO 1.5. Sejam $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Temos que $A \subsetneq B$.

EXEMPLO 1.6. Sejam A o conjunto dos números inteiros múltiplos de 4 e B o conjunto dos números pares. É óbvio que $A \subset B$ porém, vamos demonstrar esta afirmação. O primeiro passo consiste em interpretar a definição do conjunto A . Um número inteiro n é múltiplo de 4 se $n/4$ é inteiro, ou equivalentemente, se existe um inteiro m tal que $n = 4m$. Logo,

$$A = \{n ; \text{ existe um inteiro } m \text{ tal que } n = 4m\}.$$

Analogamente,

$$B = \{n ; \text{ existe um inteiro } m \text{ tal que } n = 2m\}.$$

Estamos preparados para a demonstração. Seja $n \in A$. Então existe um inteiro m tal que $n = 4m = 2(2m)$. Como m é inteiro, $2m$ também é. Concluimos que $n \in B$.

Como n é um elemento arbitrário de A (além de $n \in A$ não fizemos nenhuma hipótese sobre n) concluímos que qualquer que seja $n \in A$ temos $n \in B$, i.e, que todo elemento de A pertence a B , ou seja, que $A \subset B$. Isto termina a demonstração.

EXEMPLO 1.7. Sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Pergunta: $A \subset B$? Por quê? Resposta: Não, pois $0 \in A$ e $0 \notin B$.

De maneira geral, se A não é um subconjunto de B significa que existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B .

Existe um conjunto especial chamado de **vazio** (denotado \emptyset) que não possui nenhum elemento, ou seja, não existe x tal que $x \in \emptyset$. Uma propriedade interessante do conjunto vazio é que ele é subconjunto de qualquer conjunto. Vejamos isto mais precisamente. Suponhamos que exista um conjunto A tal que \emptyset não seja subconjunto de A . Pelo que vimos anteriormente, isto significa que existe algum elemento $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Mas, por definição de vazio, não podemos ter $x \in \emptyset$. Esta contradição nos obriga a concluir que $\emptyset \subset A$ pois, senão, chegaríamos a uma conclusão absurda.

Acabamos de mostrar que $\emptyset \subset A$ usando um argumento do tipo "**demonstração por absurdo**". Neste tipo de argumento supomos inicialmente que a conclusão desejada seja falsa e, a partir desta hipótese, chegamos a um absurdo. Desta forma, somos obrigados a admitir que a suposição é falsa e, portanto, que a conclusão desejada é verdadeira.

Existem conjuntos cujos elementos são conjuntos como mostra o próximo exemplo.

EXEMPLO 1.8. Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ e $\mathcal{C} = \{A, B\}$. Tente se convencer de que todas as afirmativas abaixo são verdadeiras.

$$A \in \mathcal{C}, \quad B \in \mathcal{C}, \quad \{A\} \subset \mathcal{C}, \quad \{B\} \subset \mathcal{C}, \quad 1 \notin \mathcal{C}, \quad 2 \notin \mathcal{C}, \quad 3 \notin \mathcal{C}.$$

Perceba ainda que é errado dizer $\{2\} \subset \mathcal{C}$, $\{3\} \subset \mathcal{C}$ ou $\{\{2\}\} \subset \mathcal{C}$. Entretanto, é verdade que $\{\{3\}\} \subset \mathcal{C}$ (esta é simplesmente a quarta das afirmações acima).

Quando \mathcal{C} é um conjunto de conjuntos, para simplificar a linguagem, muitas vezes dizemos que \mathcal{C} é uma **coleção**, uma **classe** ou uma **família** de conjuntos. Para famílias utiliza-se também notação especial (como veremos a seguir). Elementos de \mathcal{C} são comumente chamados de **membros**.

Por falar em conjuntos de conjuntos...

DEFINIÇÃO 1.9. Seja A um conjunto. A coleção de todos os subconjuntos de A é dita **conjunto das partes** de A e é denotada por $\mathcal{P}(A)$ ou por 2^A . Em símbolos,

$$\mathcal{P}(A) = \{B ; B \subset A\}.$$

Portanto, $B \in \mathcal{P}(A)$ se, e somente se, $B \subset A$.

EXEMPLO 1.10. Temos que $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Se $A = \{1\}$, então $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

1.2 Operações com conjuntos.

DEFINIÇÃO 1.11. Sejam A e B dois conjuntos. Existe um conjunto, chamado **união** ou **reunião** de A e B (denotado por $A \cup B$), cujos elementos pertencem a A ou a B . Também existe um conjunto chamado **interseção** de A e B (denotado por $A \cap B$) cujos elementos pertencem a A e a B . Em outros termos

$$A \cup B = \{x ; x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad \text{e} \quad A \cap B = \{x ; x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

De maneira geral, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1.12. Se \mathcal{C} é uma coleção não vazia de conjuntos, então a **união** ou **reunião** da coleção \mathcal{C} é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um membro de \mathcal{C} . Em símbolos,

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \{x ; \text{ existe } A \in \mathcal{C} \text{ tal que } x \in A\}.$$

A **interseção** da coleção \mathcal{C} é constituída pelos elementos que pertencem a todos os membros de \mathcal{C} . Em símbolos,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \{x ; x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{C}\}.$$

Por definição $A \cap B \cap C = \{x ; x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \in C\}$. Neste caso podemos substituir o conectivo “e” por uma vírgula “,” escrevendo $A \cap B \cap C = \{x ; x \in A, x \in B \text{ e } x \in C\}$. Porém, o conectivo “ou” é sempre preservado.

EXEMPLO 1.13. *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 4, 8\}$. Temos*

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8\} \quad \text{e} \quad A \cap B = \{1, 2\}.$$

DEFINIÇÃO 1.14. *Sejam A e B conjuntos. O conjunto **diferença** entre A e B (denotado por $A \setminus B$ ou $A - B$) é constituído pelos elementos de A que não pertencem a B . Em símbolos,*

$$A \setminus B = \{x ; x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

DEFINIÇÃO 1.15. *Quando trabalhamos apenas com subconjuntos de um determinado conjunto X (subentendido no contexto) definimos o **complementar** de A por $X \setminus A$ e o denotamos A^c .*

Dissemos anteriormente que um conjunto pode ser definido pela lista de seus elementos. Devemos ressaltar que a ordem dos elementos na lista não importa e que repetições são irrelevantes. Desta forma,

$$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, a, b\} = \{a, a, b, c\}.$$

Quando queremos que a ordem ou repetições sejam relevantes usamos o conceito de par ordenado. Dados dois objetos a e b definimos o **par ordenado** (a, b) cuja primeira **coordenada** é a e a segunda é b . Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se eles forem iguais coordenada por coordenada, *i.e.*,

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{se, e somente se,} \quad a = c \text{ e } b = d.$$

Repare que $(a, b) \neq (b, a)$ salvo se $a = b$ e que $(a, a) \neq (a)$. De maneira análoga definimos **triplos ordenadas** (a, b, c) ou **n -uplas ordenadas** (a_1, \dots, a_n) .

DEFINIÇÃO 1.16. *Dados dois conjuntos A e B existe um conjunto chamado de **produto cartesiano** de A e B (denotado $A \times B$) formado pelos pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$. Em símbolos:*

$$A \times B = \{(a, b) ; a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Em particular, podemos definir $A \times A$ e, por simplicidade, o denotamos A^2 . De maneira análoga definimos $A \times B \times C = \{(a, b, c) ; a \in A, b \in B \text{ e } c \in C\}$, $A^3 = A \times A \times A$, $A^n = A \times \dots \times A$ (n vezes).

1.3 Simplificando a escrita.

Repetidas vezes usamos expressões do tipo “existe”, “para todo”, “qualquer que seja”, etc. Para simplificar a escrita destas expressões introduziremos alguns símbolos que as representam, a saber:

\exists	significa “existe”;
$\exists!$	significa “existe um único”;
\forall	significa “para todo” ou “qualquer que seja”;
\implies	significa “se ... então ...” ou “implica que”;
\iff ou “sse” ¹	significa “se, e somente se,”.

Desta maneira, podemos escrever que, por definição, $A \subset B$ sse

$$x \in A \implies x \in B.$$

Temos também

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \{x ; x \in A \ \forall A \in \mathcal{C}\} \quad \text{e} \quad \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \{x ; \exists A \in \mathcal{C} \text{ tal que } x \in A\}.$$

1.4 Teoria dos Conjuntos é fácil?

Não entramos nos fundamentos lógicos da Teoria dos Conjuntos e tudo parece trivial e familiar. Mas (in)felizmente a Teoria dos Conjuntos não é tão fácil como possa parecer. Por exemplo, nossa exposição apresenta uma inconsistência lógica, ou paradoxo, conhecido como Paradoxo de Russel².

Logo na primeira seção dissemos que dada uma propriedade P podemos definir, ou melhor, existe o conjunto A dos elementos que possuem a propriedade P e escrevemos

$$A = \{x ; P(x)\}.$$

Ora, não há nada mais razoável.

Nada nos impede de considerar conjuntos cujos elementos são conjuntos (como já fizemos ao introduzir coleções) e de questionar se um conjunto é elemento dele mesmo. Como exemplo, considere o conjunto C de todos objetos que não são bolas. Ora, C não é uma bola, logo, $C \in C$. Vejamos como isto gera um paradoxo.

Diremos que um conjunto X é **normal** se ele não pertence a si próprio, *i.e.*, se $X \notin X$. Seja N o conjunto dos conjuntos normais:

$$N = \{X ; X \text{ é normal}\} = \{X ; X \notin X\}.$$

¹Este neologismo é derivado de outro em inglês *iff* que significa *if and only if*. Foi o matemático Halmos que o inventou. A ele devemos também o pequeno quadrado que indica final de demonstração.
Paul Richard Halmos: * 03/03/1916, Budapeste, Hungria.

²Bertrand Arthur William Russell, * 18/05/1872, Ravenscroft, País de Gales - † 02/02/1970, Penrhyn-deudraeth, País de Gales

Perguntamo-nos se N é normal. Existem duas respostas possíveis: sim ou não. Vamos analisar cada uma delas.

1ª possibilidade: N é normal.

Por definição, N é o conjunto dos conjuntos normais e, sendo ele próprio normal, temos que $N \in N$. Isto implica, por definição de conjunto normal, que N não é normal.

Temos então uma contradição! Pode-se pensar que este argumento seja apenas uma demonstração por absurdo que mostra que a primeira possibilidade não funciona e então devemos concluir que é a segunda que é a boa. Vejamos.

2ª possibilidade: N não é normal.

Pela definição de N , e como N não é normal, devemos ter $N \notin N$. Logo, por definição de conjunto normal, concluímos que N é normal.

Novamente temos uma contradição. Nenhuma das duas possibilidades é possível - paradoxo!

Para eliminar este paradoxo da Teoria dos Conjuntos (que é o pilar de toda a Matemática) uma solução é a seguinte. Ao invés de admitir que dada uma propriedade P existe o conjunto dos elementos que possuem a propriedade P , admitimos que dada uma propriedade P e um conjunto A existe o subconjunto dos elementos de A que possuem a propriedade P . Escrevemos $\{x \in A ; P(x)\}$. Feito isto o argumento usado no Paradoxo de Russel se transforma em um teorema (veja Exercício 9) segundo o qual não existe o conjunto de todas as coisas ou, de forma mais "poético-filosófica", "nada contém tudo". Boa viagem!

1.5 Funções.

Todos sabemos que o valor da prestação de uma televisão comprada em 12 parcelas iguais e sem juros depende do seu preço à vista. Por isto, dizemos que o valor da prestação é função do preço à vista. Neste caso, se x é o preço à vista, então o valor da prestação é $x/12$. A função "valor da prestação" a cada "valor à vista" x associa o "valor da prestação", dado por $x/12$. De maneira geral, uma função associa, através de uma regra precisa, cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro conjunto (os dois conjuntos em questão podem ser iguais).

O exemplo anterior é de uma função numérica definida através de uma fórmula, mas nem toda função é deste tipo. Por exemplo, cada pessoa possui um único tipo sanguíneo, logo, podemos considerar a função que a cada elemento do conjunto das pessoas associa o seu tipo sanguíneo que é um elemento do conjunto $\{A, B, AB, O\}$. Mudando a regra a função muda. Assim, a função anterior é diferente da função que a cada pessoa associa o tipo sanguíneo do pai.

DEFINIÇÃO 1.17. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma **função** $f : A \rightarrow B$ (lê-se*

função f de A em B) é definida por uma regra de associação, ou relação, entre elementos de A e B que a cada $x \in A$ associa um único elemento $f(x)$ (lê-se f de x) em B , dito **imagem** de x por f . O conjunto A é o **domínio** de f enquanto que B é o **contradomínio** de f .

Note que não deve haver exceção à regra: todo $x \in A$ possui uma imagem $f(x) \in B$. Por outro lado, pode existir $y \in B$ que não seja imagem de nenhum $x \in A$. Note também que, dado $x \in A$, não deve haver ambigüidade com respeito a $f(x)$. Entretanto, o mesmo elemento $y \in B$ pode ser imagem de mais de um elemento de A , i.e., pode ocorrer $f(x_1) = f(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$.

EXEMPLO 1.18. *Sejam $A = \{\text{alunos da UFRJ}\}$, $B = \{\text{números inteiros}\}$. Como exemplo de função, temos $f : A \rightarrow B$ que a cada $x \in A$ associa seu ano de nascimento. Outro exemplo é a função $g : A \rightarrow B$ que a cada $x \in A$ associa seu ano de entrada na UFRJ.*

EXEMPLO 1.19. *Seja $A = \{\text{pessoas}\}$. Se a cada $x \in A$ fazemos corresponder $f(x) \in A$ de maneira que $f(x)$ seja irmão de x , então f não é uma função por duas razões. Primeiro por exceção pois nem toda pessoa tem irmão. Segundo por ambigüidade pois existem pessoas que têm mais de um irmão.*

Por definição, $f, g : A \rightarrow B$ são iguais se são dadas pela mesma regra de associação, ou seja, se

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in A.$$

A condição acima só tem sentido (podendo ser falsa) se f e g tiverem o mesmo domínio (no caso A). No entanto, é dispensável que f e g tenham o mesmo contradomínio. Por esta razão, podemos considerar iguais duas funções de contradomínios diferentes. Desta forma, a função

$$h : \{\text{alunos da UFRJ}\} \rightarrow \{\text{números inteiros positivos}\},$$

que a cada $x \in \{\text{alunos da UFRJ}\}$ associa seu ano de entrada na UFRJ é igual a função g do Exemplo 1.18.

Mais grave é considerar que funções de domínios diferentes sejam iguais. Entretanto, cometemos este abuso quando, por exemplo, o domínio de uma função contém o domínio da outra. Quando a prudência mandar, devemos lidar com os conceitos de restrição e extensão.

DEFINIÇÃO 1.20. *Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$. Dizemos que f é uma **restrição** de g ou que g é uma **extensão** de f se $A \subset C$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Neste caso escrevemos $f = g|_A$.*

DEFINIÇÃO 1.21. *Sejam $f : A \rightarrow B$ e $C \subset A$. A **imagem** de C por f é definida por*

$$f(C) = \{y \in B ; \exists x \in C \text{ tal que } f(x) = y\} = \{f(x) ; x \in C\}.$$

*Em particular, o conjunto $f(A)$ é chamado de **imagem** de f .*

DEFINIÇÃO 1.22. Sejam $f : A \rightarrow B$ e $C \subset B$. A **imagem inversa** ou **pré-imagem** de C por f é definida por

$$f^{-1}(C) = \{x \in A ; f(x) \in C\}.$$

Se $C = \{y\}$, então escrevemos $f^{-1}(y)$ em vez de $f^{-1}(\{y\})$. Se $f^{-1}(C) = \{x\}$, então fazemos o abuso de notação $x = f^{-1}(C)$.

DEFINIÇÃO 1.23. Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita **sobrejetiva** se $f(A) = B$, ou seja, se qualquer que seja $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Observamos na definição anterior que, ao se tratar da sobrejetividade de uma função, deve estar claro qual conjunto está sendo considerado como contradomínio.

EXEMPLO 1.24. Seja $A = \{a, b\}$. A função f , definida por $f(x) = x$ para todo $x \in A$, não é sobrejetiva de A em $\{a, b, c\}$ mas é sobrejetiva de A em $\{a, b\}$. De modo geral, toda função é sobrejetiva na sua imagem.

DEFINIÇÃO 1.25. Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita **injetiva** ou **injeção** se para quaisquer $x, y \in A$ tais que $x \neq y$ temos $f(x) \neq f(y)$, ou equivalentemente, se $x, y \in A$ são tais que $f(x) = f(y)$, então $x = y$; ou ainda, se para todo $y \in f(A)$ existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Faremos a seguinte convenção de terminologia. Diremos que uma função f tem a propriedade P em A , se $f|_A$ tem a propriedade P . Por exemplo, dizer que f é injetiva em A significa que $f|_A$ é injetiva. Isto é muito usual, sobretudo em conversas informais entre matemáticos. Entretanto, isto deve ser usado com cuidado para não cairmos em armadilhas (veja Exercício 12 do Capítulo 6).

DEFINIÇÃO 1.26. Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita **bijetiva** ou **bijeção** se ela é injetiva e sobrejetiva.

EXEMPLO 1.27. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ e $C = \{1, 4, 9, 16\}$. Consideremos as funções $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow C$ e $h : A \rightarrow A$ definidas por

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = 2 \quad \forall x \in A.$$

Temos que f é injetiva e sobrejetiva e, portanto, bijetiva. Temos ainda que g é injetiva mas não é sobrejetiva e h não é injetiva e nem sobrejetiva.

DEFINIÇÃO 1.28. Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ tais que $f(A) \subset C$. Definimos a **função composta** $g \circ f : A \rightarrow D$ que a cada $x \in A$ associa $g(f(x)) \in D$.

A definição anterior faz sentido pois dado $x \in A$ temos que $f(x) \in f(A)$ e como $f(A) \subset C$ temos $f(x) \in C$. Neste caso podemos aplicar g e encontrar $g(f(x)) \in D$.

Observamos ainda que a operação de composição de funções é associativa, *i.e.*, se $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow D$ e $h : E \rightarrow F$ com $f(A) \subset C$ e $g(C) \subset E$, então temos

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))) \quad \forall x \in A.$$

Para $f : A \rightarrow A$ definimos $f^n : A \rightarrow A$ por $f^n = f \circ \dots \circ f$ (n vezes).

DEFINIÇÃO 1.29. *Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ tais que $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$ e $(f \circ g)(y) = y$ para todo $y \in B$. Dizemos que f é **invertível**, que g é a **inversa** de f e escrevemos $g = f^{-1}$.*

Não devemos confundir f^{-1} da definição acima com f^{-1} da Definição 1.22.

Repare que intercambiando f com g , A com B e x com y as hipóteses da Definição 1.29 não mudam, porém a conclusão dirá que f é a inversa de g . Concluímos que f é a inversa de g se, e somente se, g é a inversa de f .

Se $f : A \rightarrow B$ é injetiva, então mesmo quando ela não for sobrejetiva, ainda poderemos considerar sua função inversa f^{-1} ficando subentendido que o domínio de f^{-1} é $f(A)$ (e não B). Desta forma $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$ e $(f \circ f^{-1})(y) = y$ para todo $y \in f(A)$.

1.6 Famílias

Dissemos anteriormente que a palavra família é usada para designar conjuntos de conjuntos. De fato, este é o principal uso da palavra família mas não o único. Na verdade, uma família é uma função para a qual usamos uma notação especial.

DEFINIÇÃO 1.30. *Sejam I e C conjuntos não vazios. Uma **família** $(A_i)_{i \in I}$ de elementos de C é uma função $A : I \rightarrow C$ para a qual denotamos por A_i (em vez de $A(i)$) a imagem de i por A . Dizemos que a família está indexada pelo **índice** $i \in I$, que I é o **conjunto de índices** e que A_i é o i -ésimo elemento (ou membro) da família. Quando I é o conjunto dos números naturais substituímos a palavra família por **seqüência**.*

Os gramáticos que nos perdoem mas usamos o sufixo “ésimo” em i -ésimo mesmo quando i não é um número cardinal.

Observe que na notação $(A_i)_{i \in I}$ não aparece o contradomínio C da função. Por isto, ao introduzirmos uma família, é obrigatório dizer que tipo de objetos constituem o seu contradomínio. Por exemplo, uma família de pessoas é uma função cujo contradomínio é um conjunto de pessoas. Da mesma forma, uma família de macacos é uma função cujo contradomínio é um conjunto de macacos (agora são os biólogos que hão de nos perdoar).

Como dito anteriormente, o uso mais freqüente do termo família é quando o contradomínio é uma coleção de conjuntos. Trata-se, então, de uma família de conjuntos. Neste caso, existem notações especiais para a união e a interseção da coleção. Se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de conjuntos, então a união e a interseção da família são definidas, respectivamente, por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{B \in \mathcal{C}} B,$$

sendo \mathcal{C} a imagem de A . Desta forma, x pertence a união da família $(A_i)_{i \in I}$ se, e somente se, existe $B \in \mathcal{C}$ tal que $x \in B$. Mas como \mathcal{C} é a imagem de A , isto acontece quando, e somente quando, existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$. Do mesmo modo, constatamos que x é elemento da interseção de $(A_i)_{i \in I}$ se, e somente se, $x \in A_i$ para todo $i \in I$. Em símbolos

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x ; \text{ existe } i \in I \text{ tal que } x \in A_i\} \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x ; x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Se I é o conjunto dos números inteiros de m até n , então também é usual escrever

$$\bigcup_{i=m}^n A_i = A_m \cup \dots \cup A_n \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=m}^n A_i = A_m \cap \dots \cap A_n.$$

Se I é o conjunto de todos os inteiros positivos, então as notações usuais são

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots.$$

O símbolo ∞ (**infinito**) que aparece nas notações anteriores não é um número. Ele é apenas um símbolo tipográfico cujo papel nas notações acima é dizer que tanto a união quanto a interseção da família $(A_i)_{i \in I}$ são tomadas para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Este mesmo símbolo aparecerá em várias notações ao longo do texto sendo que em cada uma delas seu papel será diferente. Porém, sempre devemos ter em mente que infinito não é número!

1.7 Exercícios.

1 - Sejam A , B e C subconjuntos de um conjunto X . Mostre que

a) $A \cup \emptyset = A$;

b) $A \cap \emptyset = \emptyset$;

c) $A \cup X = X$;

d) $A \cap X = A$;

e) $\emptyset^c = X$;

- f) $X^c = \emptyset$;
 g) $A \subset B$ e $B \subset C \implies A \subset C$;
 h) $A \subset B \implies B^c \subset A^c$;
 i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
 j) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 k) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
 l) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

2 - Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

- i. $A \subset B$;
 ii. $A \cap B = A$;
 iii. $A \cup B = B$.

3 - Considere uma família $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de um conjunto X . Seja ainda $A \subset X$.
 Mostre que

- a) $A \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap A)$;
 b) $A \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup A)$;
 c) $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$;
 d) $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$.

Repare que (3.a), (3.b), (3.c) e (3.d) são generalizações de (1.i), (1.j), (1.l) e (1.k) (respectivamente). As relações (3.a) e (3.b) são chamadas **leis de distributividade** enquanto que (3.c) e (3.d) são conhecidas como **leis de De Morgan**¹.

4 - Sejam $f : A \rightarrow B$ e $C, D \subset A$ mostre que

- a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$;
 b) $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$.

5 - Dê um exemplo que mostre que podemos não ter igualdade entre os conjuntos do exercício (4.b).

6 - Sejam $f : A \rightarrow B$ e $C, D \subset B$ mostre que

- a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;

¹Augustus De Morgan: * 27/06/1806, Madura, Índia - † 18/03/1871, Londres, Inglaterra.

$$b) f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

Observação: Neste exercício, f^{-1} tem o sentido da Definição 1.22.

7 - Sejam $f : A \rightarrow B$ e $(B_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de B . Mostre que

$$a) f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i);$$

$$b) f^{-1} \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

Observação: Neste exercício, f^{-1} tem o sentido da Definição 1.22.

8 - Seja $f : A \rightarrow B$. Mostre que f é invertível se e somente se f é bijetiva.

9 - Usando o argumento do Paradoxo de Russel, mostre dado um conjunto A , existe um conjunto N tal que $N \notin A$. Conclua que não existe o conjunto de todas as coisas, nem o conjunto de todos os conjuntos.

Capítulo 2

Números naturais, inteiros e racionais

2.1 Números naturais e inteiros.

O conjunto usado para contagens é o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. De tão natural, \mathbb{N} ganha o nome (\mathbb{N} é o conjunto dos **números naturais**) e é o primeiro conjunto numérico que aparece na história de qualquer civilização ou em qualquer tratado sobre os fundamentos da Matemática.

Neste curso admitiremos conhecidos os conjunto \mathbb{N} e $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (dos **números inteiros**) bem como suas propriedades algébricas de soma e multiplicação e sua relação de ordem \leq .

No conjunto \mathbb{N} valem dois princípios fundamentais: o “Princípio da Boa Ordem” e o “Princípio da Indução”.

PRINCÍPIO 2.1. (Da Indução) *Seja $A \subset \mathbb{N}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$1 \in A; \tag{2.1}$$

$$n \in A \implies n + 1 \in A. \tag{2.2}$$

Então $A = \mathbb{N}$.

PRINCÍPIO 2.2. (Da Boa Ordem) *Todo subconjunto não vazio de \mathbb{N} possui elemento mínimo, ou seja, se $B \subset \mathbb{N}$ com $B \neq \emptyset$, então existe $n \in B$ tal que $n \leq m$ para todo $m \in B$.*

O Princípio da Indução (e suas variantes) é usado para demonstrar que certas propriedades são verdadeiras para todo número natural. A estratégia é a seguinte. Definimos o conjunto A constituído pelos números naturais que possuem uma certa propriedade P . A seguir, mostra-se que A satisfaz (2.1) e (2.2). Daí, concluímos que $A = \mathbb{N}$ e, portanto, que P é verificada por todo número natural. Este tipo de argumento é chamado de **demonstração por indução**.

EXEMPLO 2.3. Vamos demonstrar, por indução, a conhecida fórmula $1 + \dots + n = n(n+1)/2$ válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja A o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$ para os quais a fórmula é válida, i.e.,

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}.$$

Pelo Princípio da Indução, basta mostrar que A satisfaz (2.1) e (2.2) para concluir que $A = \mathbb{N}$, ou seja, que fórmula acima é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Evidentemente, $1 \in A$ pois $1 = 1(1+1)/2$. Tomemos $n \in A$ e mostremos que $m = n+1 \in A$. Como $n \in A$ temos $1 + \dots + n = n(n+1)/2$. Segue que

$$1 + \dots + m = 1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

TEOREMA 2.4. Se vale o Princípio da Boa Ordem, então vale o Princípio da Indução.

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{N}$ satisfazendo (2.1) e (2.2). Suponhamos, por absurdo, que $A \neq \mathbb{N}$. Isto significa que existe algum elemento de \mathbb{N} que não pertence a A e, portanto, o conjunto $B = A^c$ é não vazio. Pelo Princípio da Boa Ordem, B possui um elemento mínimo m . Com certeza $m > 1$ pois $m \notin A$ e $1 \in A$. Assim, $m-1$ é um natural menor que m . Pela minimalidade de m , temos que $m-1 \notin B$ e portanto $m-1 \in A$. De (2.2) concluímos que $m = (m-1) + 1 \in A$, o que é absurdo. ■

TEOREMA 2.5. Se vale o Princípio da Indução, então vale o Princípio da Boa Ordem.

Demonstração. Seja $B \subset \mathbb{N}$ não vazio. Suponhamos por absurdo que B não possua elemento mínimo. Em particular, $1 \notin B$ (senão 1 seria elemento mínimo de B). Seja

$$A = \{n \in \mathbb{N} ; n < m \forall m \in B\}.$$

Observamos inicialmente que $A \cap B = \emptyset$. De fato, se $A \cap B \neq \emptyset$, então existe $n \in A \cap B$. Tendo $n \in A$ temos também $n < m$ qualquer que seja $m \in B$, em particular, tomando $m = n \in B$ obtemos $n < n$ o que é absurdo. Concluímos que $A \cap B = \emptyset$.

Mostraremos a seguir que $A = \mathbb{N}$. Vejamos agora que isto é suficiente para concluir a demonstração. Neste caso temos $\emptyset = A \cap B = \mathbb{N} \cap B = B$ contradizendo a hipótese $B \neq \emptyset$.

Mostremos, por indução, que $A = \mathbb{N}$. Já sabemos que $1 \notin B$ e portanto $1 < m$ qualquer que seja $m \in B$, ou seja, $1 \in A$. Tomemos $n \in A$. Por definição de A temos $n < m$ qualquer que seja $m \in B$, logo $n+1 \leq m$ para todo $m \in B$. Se $n+1 \in B$ então $n+1$ é um elemento mínimo de B . Como, por hipótese, B não possui elemento mínimo, segue que $n+1 \notin B$ e portanto $n+1 < m$ para qualquer $m \in B$. Concluímos daí que $n+1 \in A$. Pelo Princípio da Indução $A = \mathbb{N}$. ■

2.2 Conjuntos finitos, enumeráveis e não enumeráveis.

Como dissemos na Seção 2.1 o conjunto \mathbb{N} é o conjunto usado para contagens. Quando queremos contar, por exemplo, o número de integrantes do grupo *The Beatles* procedemos da seguinte maneira. A cada músico associamos um elemento do conjunto \mathbb{N} seguindo a sua ordem usual: Paul 1, John 2, George 3 e Ringo 4.

Acabamos de definir uma função injetiva f do conjunto $A = \{\text{Beatles}\}$ no conjunto \mathbb{N} , de modo que $f(\text{Paul}) = 1$, $f(\text{John}) = 2$, $f(\text{George}) = 3$ e $f(\text{Ringo}) = 4$. Bastava tomar o conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$ como contradomínio que f ainda seria injetiva. Porém, isto não seria possível se B fosse $\{1, 2, 3\}$ pois, neste caso, pelo menos um elemento de B estaria associado a mais de um músico (e portanto f não seria injetiva). De fato, 4 é o menor número n tal que o conjunto $\{1, \dots, n\}$ possa ser contradomínio sem que f deixe de ser injetiva.

Estas considerações nos levam às seguintes definições:

DEFINIÇÃO 2.6. Dizemos que um conjunto A é **enumerável** se ele é vazio ou se existe uma função injetiva $f : A \rightarrow \mathbb{N}$.

DEFINIÇÃO 2.7. Seja A um conjunto não vazio. Se existe $n \in \mathbb{N}$ e uma função injetiva $g : A \rightarrow \{1, \dots, n\}$ diremos que A é **finito**, caso contrário, A é **infinito**. O menor número n que verifica esta propriedade é dito **número de elementos** de A . Escrevemos $\#A = n$. Diremos também que o conjunto vazio é finito e que seu número de elementos é 0.

Observamos que o número de elementos de um conjunto finito A não vazio é bem definido graças ao Princípio da Boa Ordem. De fato, o conjunto dos números $n \in \mathbb{N}$ que verificam a propriedade “existe função injetiva $g : A \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ” é um subconjunto não vazio (pois A é finito) de \mathbb{N} e portanto possui um elemento mínimo.

Vejam os outros exemplos de contagem. Um professor vai aplicar uma prova e não tem certeza se a sala destinada a este efeito tem um número suficiente de cadeiras para acomodar os alunos. Ele pode contar as cadeiras e os alunos e comparar os resultados para obter a resposta. Uma alternativa óbvia a este método é pedir aos alunos que se acomodem e três coisas podem acontecer ao final do processo:

- i. existem alunos de pé e todas as cadeiras estão ocupadas;
- ii. existem cadeiras livres e todos os alunos estão sentados;
- iii. todos os alunos estão sentados e todas as cadeiras estão ocupadas.

No primeiro caso temos que o número de alunos é maior que o de cadeiras, no segundo caso ocorre o contrário e, finalmente, no terceiro eles são iguais. Obtemos assim a resposta à pergunta “qual conjunto tem mais elementos?” sem necessariamente conhecer os números de elementos dos conjuntos envolvidos. Estas considerações motivam a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.8. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Dizemos que A e B têm a mesma **cardinalidade** ou que a cardinalidade de A é **igual** à de B e escrevemos $\#A = \#B$, se existe uma bijeção $f : A \rightarrow B$. Caso contrário dizemos que eles não têm a mesma cardinalidade ou que suas cardinalidades são diferentes e escrevemos $\#A \neq \#B$.*

A definição anterior faz sentido mesmo se os conjuntos A e B são infinitos. Nela o símbolo $\#A$ isoladamente não tem nenhum sentido. Apenas as expressões $\#A = \#B$ e $\#A \neq \#B$ têm. Por outro lado, se A é finito então $\#A$ é um número natural e tendo eles a mesma cardinalidade temos que $\#A = \#B$ e esta “igualdade” tem dois sentidos distintos: como igualdade de números naturais e como apresentado na Definição 2.8. Porém a “igualdade” ocorre num sentido se, e somente se, ocorre no outro. Por esta razão, podemos pensar no conceito de cardinalidade como generalização do conceito de número de elementos.

DEFINIÇÃO 2.9. *Sejam A e B conjuntos não vazios. Se existe função injetiva $f : A \rightarrow B$, então dizemos que a **cardinalidade** de A é **menor ou igual** à de B e escrevemos $\#A \leq \#B$. Se existe uma função sobrejetiva $g : A \rightarrow B$, então dizemos que a **cardinalidade** de A é **maior ou igual** a de B e escrevemos $\#A \geq \#B$. Se $\#A \leq \#B$ e $\#A \neq \#B$, então escrevemos $\#A < \#B$ (lê-se a cardinalidade de A é **menor** que a de B). Analogamente, se $\#A \geq \#B$ e $\#A \neq \#B$, então escrevemos $\#A > \#B$ (lê-se a cardinalidade de A é **maior** que a de B).*

Feita esta definição, temos que $A \neq \emptyset$ é enumerável se, e somente se, $\#A \leq \#\mathbb{N}$.

É verdade que $\#A \leq \#B$ se, e somente se, $\#B \geq \#A$ mas este fato carece de demonstração.

PROPOSIÇÃO 2.10. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Então $\#A \leq \#B$ se, e somente se, $\#B \geq \#A$.*

Demonstração. Suponhamos $\#A \leq \#B$ e mostremos que $\#B \geq \#A$. Por definição, existe uma função injetiva $f : A \rightarrow B$. Para concluir, devemos mostrar que existe função sobrejetiva $g : B \rightarrow A$.

Fixemos um elemento $y_0 \in A$. Para todo $x \in B$ definimos $g(x)$ da seguinte maneira. Se $x \notin f(A)$ tomamos $g(x) = y_0$, senão, se $x \in f(A)$, então, pela injetividade de f , existe um único $y \in A$ tal que $f(y) = x$. Neste caso tomamos $g(x) = y$. Mostremos que g é sobrejetiva. Seja $y \in A$ e $x = f(y)$. Temos $x \in f(A)$ e, por definição de g , segue que $g(x) = y$.

Mostremos agora a recíproca, *i.e.*, que se $\#B \geq \#A$, então $\#A \leq \#B$. Por hipótese, existe uma função sobrejetiva $g : B \rightarrow A$. Logo, para todo $y \in A$ podemos escolher $x \in B$ tal que $g(x) = y$. Definimos $f(y) = x$. Mostremos que f é injetiva. Se $f(y_1) = f(y_2)$ (com $y_1, y_2 \in A$), então $y_1 = g(f(y_1)) = g(f(y_2)) = y_2$. ■

Outra propriedade que se espera do símbolo \leq é dada pela proposição seguinte.

TEOREMA 2.11. (De Cantor¹-Bernstein²-Schröder³) Se $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$, então $\#A = \#B$.

Demonstração. Por hipótese, existem $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ injetivas. Considere $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ dada por

$$F(X) = g(f(X))^{\mathbb{C}} \quad \forall X \subset A.$$

Seja $X_0 = \bigcap_{i=0}^{+\infty} F^i(A)$ (convencionando que $F^0(A) = A$). Como f é injetiva, temos

$$f(X_0) = f\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} F^i(A)\right) = \bigcap_{i=0}^{+\infty} f(F^i(A)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(X_0) &= g\left(\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} f(F^i(A))\right)^{\mathbb{C}}\right)^{\mathbb{C}} = g\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} f(F^i(A))^{\mathbb{C}}\right)^{\mathbb{C}} = \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} g\left(f(F^i(A))^{\mathbb{C}}\right)\right)^{\mathbb{C}} \\ &= \bigcap_{i=0}^{+\infty} g\left(f(F^i(A))^{\mathbb{C}}\right)^{\mathbb{C}} = \bigcap_{i=0}^{+\infty} F(F^i(A)) = \bigcap_{i=1}^{+\infty} F^i(A) = \bigcap_{i=0}^{+\infty} F^i(A) = X_0. \end{aligned}$$

Segue que $X_0^{\mathbb{C}} = F(X_0)^{\mathbb{C}} = g(f(X_0))^{\mathbb{C}}$. Concluimos que g é uma bijeção de $f(X_0)^{\mathbb{C}}$ em $X_0^{\mathbb{C}}$, logo, g^{-1} é uma bijeção de $X_0^{\mathbb{C}}$ em $f(X_0)^{\mathbb{C}}$. Também temos que f é uma bijeção de X_0 em $f(X_0)$. Destas observações segue que $h : A \rightarrow B$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X_0, \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X_0^{\mathbb{C}}, \end{cases}$$

é bijetiva. ■

EXEMPLO 2.12. Seja A um conjunto não vazio. É evidente que $\#A = \#A$ pois a função identidade $Id : A \rightarrow A$ dada por $Id(x) = x$ para todo $x \in A$ é uma bijeção.

EXEMPLO 2.13. Sejam A e B dois conjuntos não vazios com $A \subset B$. Obviamente $\#A \leq \#B$ pois a função $Id : A \rightarrow B$ dada por $Id(x) = x$ para todo $x \in A$ é injetiva.

EXEMPLO 2.14. $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$. Escrevendo $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ uma bijeção de $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ nos salta aos olhos. Ela é dada por $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = -1, f(4) = 2, f(5) = -2, f(6) = 3, \dots$, mais precisamente,

$$f(n) = \begin{cases} m & \text{se } n = 2m, \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ -m & \text{se } n = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

¹Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor: * 03/03/1845, São Petersburgo, Rússia - † 06/01/1918 Halle, Alemanha.

²Felix Bernstein: * 24/02/1878, Halle, Alemanha - † 03/12/1956, Zurique, Suíça.

³Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder: * 25/11/1841, Mannheim, Alemanha - † 16/07/1902, Karlsruhe, Alemanha.

EXEMPLO 2.15. $\#\mathbb{N}^2 = \#\mathbb{N}$, em particular, \mathbb{N}^2 é enumerável. De fato, $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{N}^2$ pois a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ dada por $f(n) = (n, n)$ é claramente injetiva. Por outro lado, vejamos que $\#\mathbb{N}^2 \leq \#\mathbb{N}$. Pela unicidade da fatoração de naturais como produto de primos, (Teorema Fundamental da Aritmética) temos que a função $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(m, n) = 2^m 3^n$ é injetiva. Uma outra demonstração, bastante popular, para $\#\mathbb{N}^2 = \#\mathbb{N}$ é obtida através do esquema mostrado na Figura 2.1.

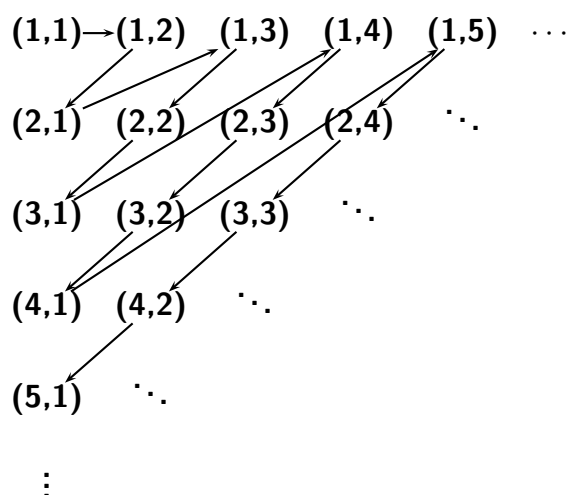


Figura 2.1: Bijeção de \mathbb{N} em \mathbb{N}^2 .

Uma bijeção $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ é definida seguindo as setas da seguinte maneira:

$$h(1) = (1, 1), \quad h(2) = (1, 2), \quad h(3) = (2, 1), \quad h(4) = (1, 3), \quad h(5) = (2, 2), \quad \dots$$

EXEMPLO 2.16. Vamos mostrar que $\#\mathbb{N} < \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ora, a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(n) = \{n\}$ é obviamente injetiva, logo $\#\mathbb{N} \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Suponhamos, por absurdo, que exista uma bijeção $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Seja $A = \{n \in \mathbb{N} ; n \notin g(n)\}$. Como g é bijetiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g(m) = A$. Das duas, uma: ou $m \in A$ ou $m \notin A$. Se $m \in A$, então $m \notin g(m) = A$, que é absurdo! Por outro lado, se $m \notin A$, então $m \in g(m) = A$ o que também é absurdo. Concluimos que não existe bijeção de \mathbb{N} em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

O argumento usado no Exemplo 2.16 é conhecido pelo nome de “Processo de Diagonalização de Cantor”. Georg Cantor procurou sem sucesso um conjunto A tal que $\#\mathbb{N} < \#A < \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Finalmente ele conjecturou que não existe tal conjunto (esta é a chamada “Hipótese do Contínuo”). Demonstrar-la ou encontrar um contra-exemplo era o primeiro da lista de 16 problemas não resolvidos no século XIX que, segundo Hilbert¹, eram os principais a serem estudados no século XX. A questão foi totalmente resolvida em 1963. Numa primeira etapa, em 1940, Gödel² [9] mostrou que ele era consistente com os axiomas de Teoria dos Conjuntos

¹David Hilbert: * 23/01/1862, Kaliningrad, Rússia - † 14/02/1943, Göttingen, Alemanha.

²Kurt Gödel: * 28/04/1906, Brno, República Tcheca - † 14/01/1978, Princeton, Estados Unidos.

propostos por Zermelo¹ e Fraenkel², ou seja, Gödel mostrou que não era possível demonstrar que a Hipótese do Contínuo era falsa. Finalmente, em 1963, Cohen³ [3] mostrou que, por outro lado, não era possível mostrar que ela era verdadeira! Desta forma demonstrou-se que a Hipótese do Contínuo é independente dos axiomas da Teoria dos Conjuntos.

PROPOSIÇÃO 2.17. *Se A e B são enumeráveis, então $A \cup B$ é enumerável.*

Demonstração. Se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, então a proposição é imediata. Suponhamos que ambos sejam não vazios. Então, existem funções injetivas $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{N}$. Definimos $h : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$ da seguinte maneira:

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) & \text{se } x \in A, \\ 2g(x) + 1 & \text{se } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Temos que h é bem definida e é, claramente, injetiva (observe que $h(A) \cap h(B) = \emptyset$ pois os elementos de $h(A)$ são números pares enquanto que os de $h(B \setminus A)$ são ímpares). ■

A próxima proposição generaliza a anterior.

PROPOSIÇÃO 2.18. *Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n é enumerável, então $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ é enumerável.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Por hipótese, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que A_n é enumerável, logo, existe $f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$ sobrejetiva. Vamos mostrar que a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow A \\ (n, m) &\longmapsto f_n(m) \end{aligned}$$

é sobrejetiva. De fato, se $x \in A$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$. Como f_n é sobrejetiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(m) = x$. Segue que $f(n, m) = f_n(m) = x$.

No Exemplo 2.15 vimos que $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{N}^2$. Portanto, existe $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ sobrejetiva. Segue que $f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow A$ é sobrejetiva. ■

2.3 Números racionais: operações e enumerabilidade.

Lembramos que um **número racional** é aquele que pode ser expresso como razão entre dois inteiros $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, i.e.,

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad \text{tais que} \quad x = \frac{m}{n}.$$

¹Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo: * 27/07/1871, Berlim, Alemanha - † 21/05/1953, Freiburg, Alemanha.

²Adolf Abraham Halevi Fraenkel: * 17/02/1891, Munique, Alemanha - † 15/10/1965, Jerusalém, Israel.

³Paul Joseph Cohen: * 02/04/1934, Long Branch, Estados Unidos.

\mathbb{Q} é o conjunto dos **números racionais**. Como $m/1 = m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ temos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Como fizemos com \mathbb{N} e \mathbb{Z} admitiremos neste curso que o leitor já está familiarizado com as propriedades básicas do conjunto \mathbb{Q} . Nesta e nas próximas duas seções revisaremos algumas destas propriedades e estudaremos outras menos familiares.

PROPOSIÇÃO 2.19. \mathbb{Q} é enumerável, i.e., $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q}$.

Demonstração. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, temos que $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{Q}$. Vamos mostrar que $\#\mathbb{N} \geq \#\mathbb{Q}$.

A definição de número racional diz que a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(m, n) = m/n$ é sobrejetiva.

Vimos no Exemplo 2.14 que \mathbb{Z} é enumerável. Segue do Exercício 6 que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ também é enumerável. Logo existe $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sobrejetiva. Terminamos a demonstração observando que $f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ é sobrejetiva. ■

As operações de adição e multiplicação de números racionais verificam certas propriedades algébricas que definem o conceito de corpo.

DEFINIÇÃO 2.20. Seja \mathbb{K} um conjunto munido de duas operações binárias chamadas **adição** e **multiplicação** da seguinte maneira: a cada par $x, y \in \mathbb{K}$ a adição e a multiplicação fazem corresponder, respectivamente, a sua **soma** $x + y \in \mathbb{K}$ e o seu **produto** $x \cdot y \in \mathbb{K}$ (por simplicidade, às vezes omitimos o \cdot). Dizemos que o terno $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um **corpo** se valem as seguintes propriedades.

i. *Comutatividade da adição e da multiplicação:*

$$x + y = y + x \quad \text{e} \quad x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbb{K}.$$

ii. *Associatividade da adição e da multiplicação:*

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{e} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}.$$

iii. *Existência do elemento neutro da adição:*

$$\exists! x \in \mathbb{K} \quad \text{tal que} \quad x + y = y \quad \forall y \in \mathbb{K}.$$

Tal elemento será denotado 0 e chamado de **zero**.

iv. *Existência de oposto:*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \exists! y \in \mathbb{K} \quad \text{tal que} \quad x + y = 0.$$

Neste caso, dizemos que y é o **oposto** de x e o denotamos $-x$.

v. Existência do elemento neutro da multiplicação:

$$\exists! x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tal que } x \cdot y = y \quad \forall y \in \mathbb{K}.$$

Tal elemento será denotado 1 e chamado de **um**.

vi. Existência de inverso:

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \exists! y \in \mathbb{K} \text{ tal que } x \cdot y = 1.$$

Neste caso, dizemos que y é o **inverso** de x e o denotamos x^{-1} .

vii. Distributividade:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}.$$

A operação de multiplicação tem prioridade sobre a de soma, assim $x \cdot y + x \cdot z$ significa $(x \cdot y) + (x \cdot z)$.

EXEMPLO 2.21. O terno $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, onde $+$ e \cdot são as operações usuais de adição e multiplicação (de números racionais), é um corpo.

A Propriedade (iii) nos diz que zero existe e é único. Na verdade a unicidade do zero pode ser demonstrada a partir de sua existência, *i.e.*, poderíamos substituir o símbolo “ $\exists!$ ” por “ \exists ” que não faria diferença. De fato, suponhamos que 0 e $0'$ sejam dois zeros, ou melhor, dois elementos neutros da adição. Mostraremos que $0 = 0'$. Como 0 é elemento neutro da adição, $0 + y = y$ para todo $y \in \mathbb{K}$. Em particular, para $y = 0'$, temos $0 + 0' = 0'$. Da mesma maneira, obtemos que $0' + 0 = 0$. Portanto, $0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0$.

Analogamente a existência do oposto de x implica a sua unicidade. De fato, suponhamos que y e z são opostos de x . Isto significa que $x + y = 0$ e $x + z = 0$, logo $x + y = x + z$. Adicionando y aos dois lados da equação obtemos

$$y + x + y = y + x + z \quad \implies \quad (y + x) + y = (y + x) + z \quad \implies \quad 0 + y = 0 + z \quad \implies \quad y = z.$$

Cabe ao leitor a tarefa de verificar as unicidades de 1 e do inverso.

Da definição de oposto e da comutatividade da soma, temos que x é o oposto de y se, e somente se, y é o oposto de x . Em outros termos, o oposto de $-x$ é x , ou ainda $-(-x) = x$. Observação análoga vale para o inverso.

Para simplificar a escrita, usaremos as seguintes convenções:

$$x - y = x + (-y) \quad \text{e} \quad \frac{x}{y} = x/y = x \cdot y^{-1}.$$

As operações de um corpo podem ser estendidas às funções com contra-domínio neste corpo. Este é o objeto da próxima definição.

DEFINIÇÃO 2.22. Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo e $f, g : A \rightarrow \mathbb{K}$. As funções **soma**, **produto**, **diferença** e **quociente** de f e g são definidas e denotadas, respectivamente, por

- i. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in A$;
- ii. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ para todo $x \in A$;
- iii. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ para todo $x \in A$;
- iv. $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ para todo $x \in A$ tal que $g(x) \neq 0$.

Dado $c \in \mathbb{K}$ definimos ainda $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$ para todo $x \in A$.

2.4 Números racionais: ordem.

No conjunto dos números racionais está definida uma relação de ordem completa.

DEFINIÇÃO 2.23. Uma relação \leq num corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é dita **ordem total** ou, simplesmente, **ordem** se valem as seguintes propriedades.

- i. Ela é transitiva: se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.
- ii. Ela é anti-simétrica: se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.
- iii. Ela é completa: $\forall x, y \in \mathbb{K}$ temos $x \leq y$ ou $y \leq x$.
- iv. A adição é monótona: se $x \leq y$, então $x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{K}$.
- v. A multiplicação é monótona: se $x \leq y$, então $x \cdot z \leq y \cdot z$ quando $0 \leq z$ e $y \cdot z \leq x \cdot z$ quando $z \leq 0$.

Neste caso, dizemos que $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ é um **corpo ordenado**.

DEFINIÇÃO 2.24. Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e sejam $x, y \in \mathbb{K}$. Se $x \leq y$, então dizemos que x é **menor ou igual** a y , ou ainda, que y é **maior ou igual** a x e também escrevemos $y \geq x$. Se $x \leq y$ e $x \neq y$, então dizemos que x é **menor** que y e escrevemos $x < y$, ou ainda, que y é **maior** que x e escrevemos $y > x$.

DEFINIÇÃO 2.25. Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $A \subset \mathbb{K}$. Dizemos que A é **limitado superiormente** pela **cota superior** $s \in \mathbb{K}$ se $a \leq s$ para todo $a \in A$. Caso contrário, A é **ilimitado superiormente**. De modo análogo define-se conjunto **limitado inferiormente**, **cota inferior** e conjunto **ilimitado inferiormente**. Finalmente, A é dito **limitado** se ele é limitado superior e inferiormente. Caso contrário, A é **ilimitado**.

DEFINIÇÃO 2.26. Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $f : A \rightarrow \mathbb{K}$. Dizemos que f é **limitada superiormente** se $f(A)$ é limitado superiormente. Analogamente define-se função **limitada inferiormente**, **função limitada** e **função ilimitada**.

DEFINIÇÃO 2.27. Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado, $A \subset \mathbb{K}$ e $f : A \rightarrow \mathbb{K}$.

- i. f é **crecente** quando $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)$.
- ii. f é **decrescente** quando $x < y$ implica que $f(y) \leq f(x)$.
- iii. f é **monótona** quando é crescente ou decrescente.
- iv. f é **estritamente crescente** quando $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$.
- v. f é **estritamente decrescente** quando $x < y$ implica que $f(x) > f(y)$.
- vi. f é **estritamente monótona** quando é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

2.5 Números racionais: propriedade arquimediana.

Uma importante propriedade do corpo ordenado $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ é ser arquimediano.

DEFINIÇÃO 2.28. Dizemos que um corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ é **arquimediano** se \mathbb{N} é um subconjunto de \mathbb{K} ilimitado superiormente, ou seja, para todo $x \in \mathbb{K}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x < m$.

De fato, $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ é arquimediano pois se $x \in \mathbb{Q}$, com $x > 0$, então, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $x = m/n$. Como $x > 0$, temos $m \in \mathbb{N}$. Concluimos observando que $x = m/n \leq m < m + 1 \in \mathbb{N}$.

2.6 Exercícios.

1 - Mostre, por indução, que $1^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2 - Mostre que

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3 - Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto infinito. Prove que existe uma única bijeção crescente $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

4 - Use a Proposição 2.17 para mostrar, de maneira diferente do Exemplo 2.14, que \mathbb{Z} é enumerável.

5 - Use a Proposição 2.18 para mostrar que \mathbb{N}^2 é enumerável.

Sugestão: Considere conjuntos da forma $\{n\} \times \mathbb{N}$ com $n \in \mathbb{N}$.

6 - Mostre que se A_1 e A_2 são enumeráveis, então $A_1 \times A_2$ é enumerável. Mostre, por indução, que se A_1, \dots, A_n são enumeráveis, então $A_1 \times \dots \times A_n$ é enumerável.

7 - Denotamos $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ao conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. Mostre que $\#\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Sugestão: Para cada $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ considere o conjunto $f^{-1}(1)$.

8 - Seja A um conjunto não vazio. Denotamos por $A^{\{1,2\}}$ ao conjunto das funções $f : \{1, 2\} \rightarrow A$. Mostre que $\#A^{\{1,2\}} = \#A^2$.

9 - Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo e $x, y, z \in \mathbb{K}$. Mostre que

a) $x \cdot 0 = 0$;

b) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$;

c) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Sugestão: Em (9.a) use $0 = 0 + 0$. Em (9.b) use (9.a) e em (9.c) use (9.b) duas vezes.

10 - Mostre a unicidade de 1 a partir de sua existência e da comutatividade da multiplicação, ou seja, mostre que se a operação \cdot é comutativa em \mathbb{K} e existe $x \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = y$ qualquer que seja $y \in \mathbb{K}$, então ele é único.

11 - Mostre a unicidade do inverso de $x \in \mathbb{K} - \{0\}$ a partir de sua existência e da comutatividade da operação de multiplicação.

12 - Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $x, y, z \in \mathbb{K}$. Mostre que

a) se $x < y$, então $x + z < y + z$;

b) se $x < y$, então $x \cdot z < y \cdot z$ quando $0 < z$ e $y \cdot z < x \cdot z$ quando $z < 0$.

13 - Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado. Sejam $x, y \in \mathbb{K}$. Mostre que

a) se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então $x \cdot y \geq 0$;

b) se $x \geq 0$ e $y \leq 0$, então $x \cdot y \leq 0$;

c) se $x \leq 0$ e $y \leq 0$, então $x \cdot y \geq 0$;

d) se $x > 0$ e $y > 0$, então $x \cdot y > 0$;

e) se $x > 0$ e $y < 0$, então $x \cdot y < 0$;

f) se $x < 0$ e $y < 0$, então $x \cdot y > 0$.

14 - Seja $f : A \rightarrow B$ uma função crescente e decrescente ao mesmo tempo. Mostre que f é **constante**, i.e., $f(x) = f(y)$ quaisquer que sejam $x, y \in A$.

15 - Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado.

a) Mostre que $0 \leq x \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{K}$ e conclua que $0 < 1$.

b) Mostre que se $0 \leq x$, então $-x \leq 0$ e conclua que $-1 < 0$. (Atenção: desigualdade estrita).

c) Diga porque é impossível definir uma relação de ordem no conjunto dos complexos de modo que $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ seja um corpo ordenado.

Sugestão: Em (15.a) considere separadamente os casos $0 \leq x$ e $x \leq 0$ e utilize a monotonia de \leq para a multiplicação. Em (15.b) use a monotonia de \leq para a adição. Em (15.c) use (15.a) e (15.b) e considere $x = i$.

16 - Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado. Sejam $x, y \in \mathbb{K}$. Mostre que

a) se $x > 0$, então $x^{-1} > 0$;

b) se $x < 0$, então $x^{-1} < 0$;

c) se $0 < x < y$, então $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

17 - (**Desigualdade de Bernoulli**¹) Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado contendo \mathbb{N} e $a \in \mathbb{K}$ com $a \geq -1$. Mostre, por indução, que $(1 + a)^n \geq 1 + na$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

18 - Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado arquimediano, e $x \in \mathbb{K}$ com $x > 0$. Mostre que

a) existe $y \in \mathbb{K}$ tal que $0 < y < x$;

b) se $y \in \mathbb{K}$ e $y > 0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < ny$;

c) se $y \in \mathbb{K}$ e $y > 1$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < y^n$.

¹Jacques Bernoulli: ✱ 27/12/1654, Basileia, Suíça - † 16/08/1705, Basileia, Suíça.

Capítulo 3

Números reais

3.1 A polêmica descoberta dos incomensuráveis.

Uma das figuras mais importantes da Matemática grega foi Pitágoras¹. Nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, ele viajou pelo Egito e Babilônia antes de se estabelecer em Crotona (atualmente na Itália) e lá fundar a chamada Escola Pitagórica. Mais do que uma escola matemática ela era uma sociedade secreta dotada de várias doutrinas científicas, filosóficas, políticas e morais. Uma delas dizia que o conhecimento era um bem comum à sociedade, e por isso, a atribuição de descobertas não era feita a nenhum membro específico da escola. Por esta razão, é melhor não falar da obra de Pitágoras mas sim da obra dos pitagóricos.

O famoso Teorema de Pitágoras já era conhecido, provavelmente, por outras civilizações mas imagina-se que foram os pitagóricos os primeiros a demonstrá-lo.

Segundo outra doutrina pitagórica “tudo é número”, ou seja, tudo podia ser explicado através dos números (inteiros) e suas razões (números racionais). Acreditava-se também que dados dois segmentos quaisquer eles eram sempre **comensuráveis**, *i.e.*, que existia um terceiro segmento, menor que os dois primeiros, tal que cada um deles era múltiplo inteiro do menor. Em outros termos, se a e b são os comprimentos dos dois segmentos, então existe um segmento de comprimento c e dois inteiros m e n tais que $a = mc$ e $b = nc$. Daí conclui-se que $a/b = m/n$. Muitas das demonstrações da época eram baseadas neste fato. Vejamos o que, junto com o Teorema de Pitágoras, isto acarreta.

Consideremos um quadrado de lado 1 e seja d o comprimento de sua diagonal. Pelo Teorema de Pitágoras $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Pela comensurabilidade entre a diagonal e o lado, existem inteiros m e n tais que $d/1 = m/n$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que m e n não têm divisor comum maior que 1. Assim, $2 = d^2 = m^2/n^2$. Segue que $m^2 = 2n^2$ e, portanto, m^2 é par, o que implica que m também é. Logo, existe um inteiro p tal que $m = 2p$. Temos então $2n^2 = m^2 = 4p^2$ e, portanto, $n^2 = 2p^2$. Daí concluímos que n^2 é par

¹Pitágoras de Samos: * \approx 569 A.C., Samos, Grécia - † \approx 475 A.C., ?.

e, logo, n também é. Provamos que tanto m quanto n são pares contradizendo o fato que eles não possuem divisor comum maior que 1. Isto mostra que 1 e d são **incomensuráveis**.

A comensurabilidade entre dois segmentos quaisquer é equivalente ao fato que todo número é racional! A incomensurabilidade entre 1 e d significa que $d = \sqrt{2}$ não é racional. Isto mostrou aos Pitagóricos que, ao contrário do que eles preconizavam, os números (inteiros) e suas razões não eram capazes de explicar tudo. Acredita-se este resultado foi descoberto e revelado por Hipassus de Metapontum¹ que, por este motivo, foi expulso da confraria (pior, segundo a lenda, ele foi jogado ao mar).

Foi Eudoxo² quem resolveu a crise surgida com a descoberta dos incomensuráveis introduzindo uma nova definição de razão tal como ela aparece no livro V de “Os Elementos” de Euclides³.

3.2 ★ Cortes de Dedekind.

Vimos na seção anterior que os números racionais são insuficientes. Por isto, devemos completá-los introduzindo o corpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ dos números reais. O conjunto \mathbb{R} contém o conjunto dos números racionais. Existem várias maneiras de construir este corpo ordenado. Neste texto, optamos pela construção através de cortes de Dedekind⁴ [4] que pode ser vista como uma modernização da idéia de Eudoxo.

Com certeza o leitor está habituado a trabalhar com números reais. Porém, se este é seu primeiro Curso de Análise, é muito provável que ele nunca tenha visto a definição de número real. O objetivo desta seção é cobrir esta lacuna.

Os gregos da época pitagórica conheciam e manipulavam números racionais e apenas eles. Suas demonstrações eram baseadas nas propriedades dos racionais e somente nelas. Por outro lado, eles sabiam que existiam outros “números” (por exemplo $\sqrt{2}$) e, pelo fato de não saberem como eles eram, os gregos eram incapazes de manipulá-los. Este foi o motivo da crise descrita na seção precedente.

Peço ao leitor que se comporte, simultaneamente, com duas posturas diferentes. Deve esquecer tudo o que conhece sobre números reais - até mesmo a existência. Deve admitir, neste momento, que conhece, além de Teoria dos Conjuntos, apenas funções, números racionais e suas propriedades (operatórias, ordem, etc). Por outro lado, o leitor deve manter em mente o conjunto dos números reais pois a experiência adquirida com ele nos guiará para a sua construção. Sabendo onde se deve chegar fica mais fácil percorrer o caminho até lá.

A mesma tipografia usada para as definições, exemplos, teoremas, etc será usada, e identificada pela palavra **IDÉIA**, para explicar a idéia intuitiva sobre os números reais que estará

¹Hipassus de Metapontum: ★ ≈ 500 A.C., Metapontum, Itália - † ?

²Eudoxo de Cnido: ★ 408 A.C., Cnido, Turquia - † 355 A.C., Cnido, Turquia.

³Euclides de Alexandria: ★ ≈ 325 A.C., ? - † ≈ 265 A.C., Alexandria, Egito.

⁴Julius Wilhelm Richard Dedekind: ★ 06/10/1831, Braunschweig, Alemanha - † Braunschweig, Alemanha.

por trás das demonstrações e definições que a seguirão. Porém, elas servem apenas para isto e não podem ser usadas como fato constatado. Começamos por uma destas idéias.

IDÉIA. *Seja A um intervalo (de números reais) aberto, ilimitado inferiormente e limitado superiormente. Claramente, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $A = (-\infty, a)$. Reciprocamente, dado um número real a o intervalo $(-\infty, a)$ é aberto, ilimitado inferiormente e limitado superiormente. Desta forma, existe uma correspondência biunívoca entre números reais e intervalos abertos, ilimitados inferiormente e limitados superiormente. A nossa construção será baseada nesta correspondência: consideraremos intervalos do tipo $(-\infty, a)$ e no conjunto de tais intervalos definiremos uma relação de ordem assim como operações de soma e multiplicação. Ao final diremos que cada intervalo destes é um número real.*

O nosso trabalho consiste então em definir um intervalo aberto, ilimitado inferiormente e limitado superiormente, i.e., um intervalo do tipo $(-\infty, a)$ sem considerar o número a que, rigorosamente falando, não existe! A definição seguinte cumpre este objetivo.

DEFINIÇÃO 3.1. *Dizemos que $A \subset \mathbb{Q}$ é um corte se valem as seguintes propriedades.*

- i. $A \neq \emptyset$ e $A^c \neq \emptyset$.*
- ii. Se $p \in A$ e $q < p$ então $q \in A$.*
- iii. Para todo $p \in A$ existe $q \in A$ tal que $p < q$.*

Denotamos o conjunto de todos os cortes por Ω .

IDÉIA. *As duas primeiras condições da Definição 3.1 implicam que A é um conjunto da forma $(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$ ou $(-\infty, a] \cap \mathbb{Q}$. A terceira condição exclui a segunda possibilidade (quando $a \in \mathbb{Q}$) dizendo que A não tem máximo.*

EXEMPLO 3.2. *Seja $r \in \mathbb{Q}$. O conjunto $Z(r) = \{p \in \mathbb{Q} ; p < r\}$ é um corte. De fato, é fácil ver que $Z(r)$ satisfaz as duas primeiras propriedades da definição de corte. Falta mostrar que ele satisfaz a terceira. Seja $p \in Z(r)$ e tomemos $q = (p+r)/2$. Claramente temos $p < q$ e $q < r$ (logo $q \in Z(r)$). Definimos desta maneira uma função $Z : \mathbb{Q} \rightarrow \Omega$ que é claramente injetiva. Veremos, posteriormente, outras de suas importantes propriedades.*

O exemplo anterior é fundamental. Para destacá-lo, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.3. *O cortes da forma $Z(r) = \{p \in \mathbb{Q} ; p < r\}$, com $r \in \mathbb{Q}$, são ditos cortes racionais.*

IDÉIA. *Sejam a e b dois números reais. Temos que $a \leq b$ se, e somente se, $(-\infty, a) \subset (-\infty, b)$. Isto nos indica que a relação de inclusão entre cortes é a maneira natural de definir*

uma relação de ordem no conjunto Ω . Já sabemos que a relação de inclusão é transitiva e anti-simétrica. Porém, ela não é completa pois existem $A \subset \mathbb{Q}$ e $B \subset \mathbb{Q}$ que não são comparáveis, i.e., nem $A \subset B$ nem $B \subset A$. Entretanto se A e B são cortes uma destas inclusões deve ser verdadeira. Este é o assunto do próximo teorema.

TEOREMA 3.4. *Sejam $A, B \in \Omega$. Temos $A \subset B$ ou $B \subset A$.*

Demonstração. Se $A = B$, então não há nada a ser demonstrado. Suponhamos que $A \neq B$. Então, existe $p \in B$ tal que $p \notin A$ ou existe $q \in A$ tal que $q \notin B$.

No primeiro caso devemos ter $A \subset B$. De fato, qualquer que seja $r \in A$ temos $r < p$ (pois senão, se fosse $p \leq r$, então, como A é corte, teríamos $p \in A$) e, como B é corte, $r \in B$.

De maneira análoga, concluímos que no segundo caso temos $B \subset A$. ■

PROPOSIÇÃO 3.5. *Seja $A, B \in \Omega$. O conjunto*

$$C = \{r \in \mathbb{Q} ; r = p + q \text{ com } p \in A \text{ e } q \in B\}$$

é corte.

Demonstração. Claramente $C \neq \emptyset$. Sejam $p_0 \in A^c$ e $q_0 \in B^c$. Vamos mostrar que $p_0 + q_0 \notin C$ (e portanto que $C^c \neq \emptyset$). Suponhamos, por absurdo, que $p_0 + q_0 \in C$. Então, existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $p_0 + q_0 = p + q$. Não podemos ter $p_0 \leq p$ (senão teríamos $p_0 \in A$) nem $q_0 \leq q$ (senão teríamos $q_0 \in B$). Logo $p < p_0$ e $q < q_0$. Pela monotonia da adição $p + q < p + q_0 < p_0 + q_0$, que é absurdo.

Sejam $r \in C$ e $s < r$. Existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $r = p + q$. Seja $t = s - p$. Mostremos que $t \in B$. De fato, devemos ter $t < q$ pois senão, se $q \leq t$, então $p + q \leq p + t$, i.e., $r \leq s$. Portanto $t < q$ e, como B é corte, segue que $t \in B$. Concluímos que $s = p + t$ com $p \in A$ e $t \in B$ e, portanto, $s \in C$.

Finalmente, seja $r \in C$ e mostremos que existe $s \in C$ tal que $r < s$. Ora, $r \in C$ significa que $r = p + q$ com $p \in A$ e $q \in B$. Existe $t \in A$ tal que $p < t$, logo, $r = p + q < t + q$. Para concluir, basta tomarmos $s = t + q$. ■

DEFINIÇÃO 3.6. *Sejam $A, B \in \Omega$. O corte C dado na Proposição 3.5 é denotado $A \oplus B$ é chamado de **soma** ou **adição** de A e B .*

OBSERVAÇÃO 3.7. *É fácil ver que se $A, B \in \Omega$ são tais que $Z(0) \subset A \cap B$, então $Z(0) \subset A \oplus B$.*

Fica assim definida uma operação de adição entre cortes. Mostraremos que esta operação satisfaz algumas das propriedades da adição em um corpo.

TEOREMA 3.8. *Sejam $A, B, C \in \Omega$. Temos*

- i. $A \oplus B = B \oplus A$;*
- ii. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;*
- iii. $A \oplus Z(0) = A$.*

Demonstração. (i) Seja $r \in A \oplus B$. Podemos escrever $r = p + q$ com $p \in A$ e $q \in B$. Pela comutatividade da soma de números racionais, temos $r = q + p$ com $q \in B$ e $p \in A$. Concluimos que $r \in B \oplus A$ e, portanto, $A \oplus B \subset B \oplus A$. Da mesma maneira mostra-se a inclusão contrária.

(ii) Esta propriedade é conseqüência imediata da associatividade da soma de números racionais (assim como (i) é da comutatividade).

(iii) Seja $r \in A \oplus Z(0)$. Escrevemos $r = p + q$ com $p \in A$ e $q \in Z(0)$. Ora $q \in Z(0)$ significa $q < 0$, logo, $p + q < p + 0$, i.e., $r < p$. Como A é corte, segue que $r \in A$. Mostramos assim que $A \oplus Z(0) \subset A$. Reciprocamente, seja $r \in A$. Tomemos $p \in A$ tal que $r < p$. Se $q = r - p$, então $q < 0$ e, portanto, $q \in Z(0)$. Concluimos que $r = p + q \in A \oplus Z(0)$. ■

IDÉIA. Para cada $a \in \mathbb{R}$ está associado o intervalo $A = (-\infty, a)$ e ao seu oposto $-a$ está associado o intervalo $B = (-\infty, -a)$. Devemos ser capazes de definir B em termos de A sem considerar o número a . Inicialmente observamos que $p \in B$ se, e somente se, $-p \in (a, +\infty)$. Mas $A^c = [a, +\infty)$, logo, $p \in B$ se, e somente se, $-p \in A^c$ e $-p \neq a$. Para dizer que $-p \neq a$, evitando usar o número a , basta dizer que $-p$ não é mínimo de A^c .

PROPOSIÇÃO 3.9. *Seja $A \in \Omega$. O conjunto*

$$B = \{p \in \mathbb{Q} ; -p \in A^c \text{ e } \exists q \in A^c \text{ tal que } q < -p\}$$

é corte.

Demonstração. Sejam $p \in A$ e $q \in A^c$. É fácil ver que $-(q+1) \in B$ e $-p \in B^c$. Portanto, $B \neq \emptyset$ e $B^c \neq \emptyset$.

Sejam $p \in B$ e $q < p$. Temos que $-p < -q$. Como $-p \in A^c$, segue que $-q \in A^c$ e que $-q$ não é mínimo de A^c . Concluimos que $q \in B$.

Seja $p \in B$. Por definição de B , existe $q \in A^c$ tal que $q < -p$. Tomando $r = (p - q)/2$ temos que $p < r$ e também que $q < -r$, logo, $r \in B$. ■

DEFINIÇÃO 3.10. *O corte B da Proposição 3.9 é denotado $\ominus A$ e chamado **oposto** de A .*

OBSERVAÇÃO 3.11. *Seja $A \in \Omega$. É fácil ver que:*

- i. $A = Z(0) \iff \ominus A = Z(0)$;
- ii. $A \neq Z(0) \iff \ominus A \neq Z(0)$;
- iii. $A \supset Z(0) \iff \ominus A \subset Z(0)$;
- iv. $A \supsetneq Z(0) \iff \ominus A \subsetneq Z(0)$.

O teorema justifica porque chamamos o corte $\ominus A$ de oposto de A .

TEOREMA 3.12. *Seja $A \in \Omega$. Temos que $A \oplus (\ominus A) = Z(0)$.*

Demonstração. Seja $r \in A \oplus (\ominus A)$. Então existem $s \in A$, $p \in \ominus A$ e $q \in A^{\mathbb{C}}$ tais que $r = s + p$ e $q < -p$. Como $s \in A$ e $q \in A^{\mathbb{C}}$, temos $s < q$. De $q < -p$ segue que $p < -q$ e, pela monotonia da adição, $s + p < s - q$. Portanto, $r = s + p < s - q < 0$. Concluimos que $r \in Z(0)$.

Finalmente, seja $r \in Z(0)$, i.e., $r < 0$. Sejam ainda $s \in A$ e n o menor natural tal que $s - nr/2 \in A^{\mathbb{C}}$. Tomemos

$$p = s - \frac{(n-1)r}{2}, \quad t = s - \frac{nr}{2} \quad \text{e} \quad q = s - \frac{(n+1)r}{2}.$$

É fácil ver que $t, q \in A^{\mathbb{C}}$ e $t < q$, logo, $-q \in \ominus A$. Também temos $p \in A$ e $r = p - q$. Segue que $r \in A \oplus (\ominus A)$. ■

IDÉIA. *Queremos definir multiplicação de cortes. A primeira idéia é imitar a definição da soma. Definimos o conjunto C , produto dos cortes A e B , formado pelos produtos $p \cdot q$ sendo $p \in A$ e $q \in B$. Porém, isto não funciona pois o conjunto C não é corte. Para ver isto, considere o exemplo $A = B = Z(2)$. Neste caso, $C = \mathbb{Q}$. De fato, $-1, 1 \in A$ e se $r < 0$, então $r \in B$. Segue que $-r, r \in C$ e, portanto, $C = \mathbb{Q}$.*

Vamos adaptar esta idéia inicialmente para cortes "positivos". Posteriormente, estendaremos a definição para todos os cortes. Como vimos no Exercício 13 do Capítulo 2, o produto de números positivos é positivo. Portanto, tomando apenas os racionais positivos nos cortes A e B obteremos apenas os racionais positivos de C . Para que C seja corte, faltará incluir os racionais negativos.

PROPOSIÇÃO 3.13. *Sejam $A, B \in \Omega$ tais que $Z(0) \subset A$ e $Z(0) \subset B$. O conjunto*

$$C = \{r \in \mathbb{Q}; r < 0 \text{ ou } r = p \cdot q \text{ com } p \in A, q \in B, p \geq 0 \text{ e } q \geq 0\}$$

é corte.

Demonstração. Claramente $-1 \in C$. Sejam $p_0 \in A^{\mathbb{C}}$ e $q_0 \in B^{\mathbb{C}}$. Vamos mostrar que $p_0 \cdot q_0 \notin C$ (e, portanto, que $C^{\mathbb{C}} \neq \emptyset$). Suponhamos, por absurdo, que $p_0 \cdot q_0 \in C$. Então,

existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $p_0 \cdot q_0 = p \cdot q$. Não podemos ter $p_0 \leq p$ (senão teríamos $p_0 \in A$) nem $q_0 \leq q$ (senão teríamos $q_0 \in B$). Logo, $p < p_0$ e $q < q_0$. Pela monotonia da multiplicação, $p \cdot q \leq p \cdot q_0 < p_0 \cdot q_0$, que é absurdo.

Sejam $r \in C$ e $s < r$. Se $s < 0$, então é imediato que $s \in C$. Suponhamos $s \geq 0$ e, portanto, $r > 0$. Da definição de C , segue que existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $r = p \cdot q$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Como $r > 0$, segue que $p > 0$. Seja $t = s/p$. Mostremos que $t \in B$. De fato, devemos ter $t < q$ pois senão, se $q \leq t$, então $p \cdot q \leq p \cdot t$, i.e., $r \leq s$. Portanto, $t < q$ e, como B é corte, segue que $t \in B$. Concluimos que $s = p \cdot t$ com $p \in A$ e $t \in B$ e, portanto, $s \in C$.

Finalmente, seja $r \in C$ e mostremos que existe $s \in C$ tal que $r < s$. Se $r < 0$, então basta tomar $s = r/2$. Suponhamos $r \geq 0$. Neste caso, $r \in C$ significa que $r = p \cdot q$ com $p \in A$, $q \in B$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Existem $t \in A$ e $u \in B$ tal que $p < t$ e $q < u$, logo $r = p \cdot q \leq t \cdot q < t \cdot u$. Para concluir, basta tomarmos $s = t \cdot u$. ■

DEFINIÇÃO 3.14. *Sejam $A, B \in \Omega$ tais que $Z(0) \subset A$ e $Z(0) \subset B$. O corte C dado na Proposição 3.13 e denotado $A \odot B$ é chamado de **produto** ou **multiplicação** de A e B .*

OBSERVAÇÃO 3.15. *Da Definição 3.14 segue-se imediatamente que se $Z(0) \subset A$ e $Z(0) \subset B$, então $Z(0) \subset A \odot B$.*

IDÉIA. *Para estender a definição de produto para cortes não positivos, procedemos como quando aprendemos a multiplicar números negativos pela primeira vez (no Ensino Fundamental). Fazemos o produto dos módulos e ao resultado impomos o sinal de acordo com a regra dos sinais. Vejamos a definição de módulo de um corte e, em seguida, a definição geral do produto.*

DEFINIÇÃO 3.16. *Dado $A \in \Omega$, o **módulo** de A , denotado por $|A|$, é definido por*

$$|A| = \begin{cases} A & \text{se } Z(0) \subset A, \\ \ominus A & \text{se } A \subsetneq Z(0). \end{cases}$$

Em vista da Observação 3.11 temos que $|A| \supset Z(0)$ para todo $A \in \Omega$.

DEFINIÇÃO 3.17. *Sejam $A, B \in \Omega$. Definimos $A \odot B$ por*

$$A \odot B = \begin{cases} |A| \odot |B| & \text{se } Z(0) \subset A \text{ e } Z(0) \subset B, \\ \ominus(|A| \odot |B|) & \text{se } Z(0) \subset A \text{ e } B \subsetneq Z(0), \\ \ominus(|A| \odot |B|) & \text{se } A \subsetneq Z(0) \text{ e } Z(0) \subset B, \\ |A| \odot |B| & \text{se } A \subsetneq Z(0) \text{ e } B \subsetneq Z(0). \end{cases} \quad (3.1)$$

TEOREMA 3.18. *Sejam $A, B, C \in \Omega$. Temos*

- i. $A \odot B = B \odot A$;*
- ii. $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$;*
- iii. $A \odot Z(1) = A$.*

Onde $Z(1) = \{p \in \mathbb{Q} ; p < 1\}$ (conforme a Definição 3.3).

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que $Z(0) \subset A \cap B \cap C$.

(i) Seja $r \in A \odot B$. Se $r < 0$, então é imediato que $r \in B \odot A$. Suponhamos $r \geq 0$. Podemos escrever $r = p \cdot q$ com $p \in A$, $q \in B$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Pela comutatividade do produto de números racionais, temos $r = q \cdot p$ com $q \in B$, $p \in A$, $q \geq 0$ e $p \geq 0$. Concluimos que $r \in B \odot A$ e, portanto, $A \odot B \subset B \odot A$. Da mesma maneira mostra-se a inclusão contrária.

(ii) Esta propriedade é consequência imediata da associatividade do produto de números racionais (assim como (i) é da comutatividade).

(iii) Observamos inicialmente que $Z(0) \subset Z(1)$. Seja $r \in A \odot Z(1)$. Novamente, se $r < 0$, então é imediato que $r \in Z(0) \subset A$. Suponhamos $r \geq 0$. Escrevemos $r = p \cdot q$ com $p \in A$, $q \in Z(1)$ e $p \geq 0$. Ora $q \in Z(1)$ significa $q < 1$, logo, $p \cdot q \leq p \cdot 1$, i.e., $r \leq p$. Como A é corte, segue que $r \in A$. Mostramos assim que $A \odot Z(1) \subset A$. Reciprocamente, seja $r \in A$. Se $r < 0$, então $r \in A \odot Z(1)$. Suponhamos $r \geq 0$. Tomemos $p \in A$ tal que $0 \leq r < p$. Se $q = r/p$, então $0 \leq q < 1$ e, portanto, $q \in Z(1)$. Concluimos que $r = p \cdot q \in A \odot Z(1)$.

O caso geral é consequência da parte já demonstrada. Por exemplo, vamos mostrar (i) para $A \subsetneq Z(0) \subset B$. Neste caso,

$$A \odot B = \ominus(|A| \odot |B|) = \ominus(|B| \odot |A|) = B \odot A.$$

A primeira igualdade segue da terceira linha de (3.1), a segunda igualdade é a parte já demonstrada do teorema e a terceira igualdade segue da segunda linha de (3.1). Deixo para o leitor a tarefa de terminar a prova do teorema. ■

PROPOSIÇÃO 3.19. *Seja $A \in \Omega$ tal que $Z(0) \subsetneq A$. O conjunto*

$$B = \{p \in \mathbb{Q} ; p \leq 0 \text{ ou } p^{-1} \in A^{\text{G}} \text{ e } \exists q \in A^{\text{G}} \text{ tal que } q < p^{-1}\}$$

é corte.

Demonstração. Claramente temos $-1 \in B$. Seja $p \in A$ tal que $p > 0$. Temos que $p^{-1} \in B^{\text{G}}$. De fato, se fosse $p^{-1} \in B$, então teríamos $p = (p^{-1})^{-1} \in A^{\text{G}}$, que é absurdo.

Sejam $p \in B$ e $q < p$. Se $q \leq 0$, então trivialmente temos $q \in B$. Suponhamos $q > 0$ e, portanto, $p > q > 0$. Temos $p^{-1} < q^{-1}$. Como $p^{-1} \in A^{\mathbb{G}}$, segue que $q^{-1} \in A^{\mathbb{G}}$ e que q^{-1} não é mínimo de $A^{\mathbb{G}}$. Concluimos que $q \in B$.

Seja $p \in B$. Vamos mostrar que existe $q \in B$ tal que $p < q$. Claramente existe $q \in B$ com $q > 0$, logo, se $p \leq 0$, então não há nada a ser demonstrado. Suponhamos $p > 0$. Por definição de B , existe $r \in A^{\mathbb{G}}$ tal que $r < p^{-1}$. Tomando $s = (r + p^{-1})/2$ temos $r < s < p^{-1}$ e, portanto, $s \in A^{\mathbb{G}}$. Tomando $q = s^{-1}$ temos $p < q$ e também $q \in B$ pois $q^{-1} \in A^{\mathbb{G}}$ e $r < q^{-1}$. ■

DEFINIÇÃO 3.20. *Seja $A \in \Omega$ tal que $A \neq Z(0)$. Se $Z(0) \subsetneq A$ então o corte B da Proposição 3.19 é denotado $A^{\ominus 1}$ e chamado **inverso** de A . Se $A \subsetneq Z(0)$, então definimos $A^{\ominus 1} = \ominus(|A|^{\ominus 1})$.*

O teorema a seguir justifica porque chamamos o corte $A^{\ominus 1}$ de inverso de A .

TEOREMA 3.21. *Seja $A \in \Omega$ tal que $A \neq Z(0)$. Temos $A \odot (A^{\ominus 1}) = Z(1)$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $Z(0) \subsetneq A$.

Seja $r \in A \odot (A^{\ominus 1})$. Se $r \leq 0$, então $r \in Z(1)$. Suponhamos $r > 0$. Então existem $s \in A$, $p \in A^{\ominus 1}$ e $q \in A^{\mathbb{G}}$ tais que $r = s \cdot p$, $s > 0$, $p > 0$ e $q < p^{-1}$. Como $s \in A$ e $q \in A^{\mathbb{G}}$, temos $s < q$. De $q < p^{-1}$ segue que $p < q^{-1}$ e, pela monotonia da multiplicação, $s \cdot p < s/q$. Portanto, $r = s \cdot p < s/q < 1$. Concluimos que $r \in Z(1)$.

Reciprocamente, seja $r \in Z(1)$. Como antes, se $r < 0$, então é imediato que $r \in A \odot (A^{\ominus 1})$. Por outro lado, se $r = 0$, então, como $0 \in A$ e $0 \in A^{\ominus 1}$, temos $r = 0 \cdot 0 \in A \odot (A^{\ominus 1})$. Suponhamos $r > 0$. Seja $s \in A$ com $s > 0$ e n o menor natural tal que $s \cdot (r^{-1})^n \in A^{\mathbb{G}}$ (tal n existe pois $r < 1$ e, portanto, $r^{-1} > 1$). Tomemos

$$p_1 = s \cdot (r^{-1})^{n-1} \quad \text{e} \quad t = s \cdot (r^{-1})^n.$$

Pela escolha de n , temos $p_1 \in A$ e $t \in A^{\mathbb{G}}$. Seja $p \in A$ tal que $p_1 < p$ e tomemos $q = t^{-1} \cdot p^{-1} \cdot p_1$. De $p_1 < p$ segue que $t < t \cdot p \cdot p_1^{-1} = q^{-1}$. Obtemos assim que $q \in A^{\mathbb{G}}$ e daí que $q \in A^{\ominus 1}$. Temos ainda

$$p \cdot q = p \cdot t^{-1} \cdot p^{-1} \cdot p_1 = s^{-1} \cdot r^n \cdot s \cdot (r^{-1})^{n-1} = r.$$

Concluimos que $r \in A \odot A^{\ominus 1}$.

Consideremos o caso $A \subsetneq Z(0)$. Temos trivialmente que $A^{\ominus 1} \subsetneq Z(0)$. Da definição de produto de cortes e da parte já demonstrada do teorema obtemos

$$A \odot (A^{\ominus 1}) = |A| \odot |A^{\ominus 1}| = |A| \odot |\ominus(|A|^{\ominus 1})| = |A| \odot (|A|^{\ominus 1}) = Z(1).$$

■

TEOREMA 3.22. *Sejam $A, B, C \in \Omega$. Temos que $(A \oplus B) \odot C = (A \odot C) \oplus (B \odot C)$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente $Z(0) \subset A \cap B \cap C$.

Seja $r \in (A \oplus B) \odot C$. Vamos mostrar que $r \in (A \odot C) \oplus (B \odot C)$. Em vista das observações 3.7 e 3.15 temos $Z(0) \subset (A \odot C) \oplus (B \odot C)$ e, portanto, basta considerar o caso $r \geq 0$. Podemos supor ainda que $r > 0$ pois, neste caso, se r é elemento do corte $(A \odot C) \oplus (B \odot C)$, então 0 também é. Neste caso, existem $p \in A \oplus B$ e $q \in C$ tais que $r = p \cdot q$, $p > 0$ e $q > 0$. Ora $p \in A \oplus B$, logo, podemos escrever $p = s + t$ com $s \in A$ e $t \in B$. Vamos mostrar que $s \cdot q \in A \odot C$ (da mesma maneira mostra-se que $t \cdot q \in B \odot C$). Se $s \cdot q < 0$, então, novamente graças às observações 3.7 e 3.15, é imediato que $s \cdot q \in A \odot C$. Por outro lado, se $0 \leq s \cdot q$, então, como $q > 0$, temos que $s \geq 0$ e daí segue que $s \cdot q \in A \odot C$. Tendo $r = s \cdot q + t \cdot q$ com $s \cdot q \in A \odot C$ e $t \cdot q \in B \odot C$, concluímos que $r \in (A \odot C) \oplus (B \odot C)$.

Seja $r \in (A \odot C) \oplus (B \odot C)$ e mostremos que $r \in (A \oplus B) \odot C$. Como antes, basta considerar o caso $r > 0$. Existem $p \in A \odot C$ e $q \in B \odot C$ tais que $r = p + q$. Como $0 < r$, temos $p > 0$ ou $q > 0$. Para fixar as idéias, suponhamos $p > 0$. Neste caso, existem $s \in A$ e $t \in C$ tais que $p = s \cdot t$, $s > 0$ e $t > 0$. Vamos considerar separadamente os casos $q > 0$, $q = 0$ e $q < 0$.

1) $q > 0$.

Existem $u \in B$ e $v \in C$ tais que $q = u \cdot v$, $u > 0$ e $v > 0$. Suponhamos $v \leq t$ (o caso $v > t$ se trata analogamente). Temos $r = s \cdot t + u \cdot v = (s + u \cdot v/t) \cdot t$. Como $v/t \leq 1$ temos que $u \cdot v/t \in B$. Segue que $r \in (A \oplus B) \odot C$.

2) $q = 0$.

Tomemos $q' \in B \odot C$ tal que $q < q'$. Como $r = p + q < p + q'$ e, pelo caso anterior, $p + q' \in (A \oplus B) \odot C$, concluímos que $r \in (A \oplus B) \odot C$.

3) $q < 0$.

Escrevemos $r = (s + q \cdot t^{-1}) \cdot t$. Como $q \cdot t^{-1} < 0$, segue que $q \cdot t^{-1} \in B$. Concluímos que $r \in (A \oplus B) \odot C$ (observe que $s + q \cdot t^{-1} > 0$).

Cada um dos outros casos (para os quais não vale $Z(0) \subset A$, $Z(0) \subset B$ e $Z(0) \subset C$) é tratado de maneira análoga ou é consequência deste que acabamos de demonstrar. ■

Os teoremas 3.8, 3.12, 3.18, 3.21 e 3.22 nos dizem que (Ω, \oplus, \odot) é um corpo. Além disto, a relação de inclusão \subset é uma relação transitiva, anti-simétrica e completa em Ω . Para concluirmos que $(\Omega, \oplus, \odot, \subset)$ é um corpo ordenado falta estabelecer a monotonia das operações. Este é o assunto do próximo teorema.

TEOREMA 3.23. *Sejam $A, B, C \in \Omega$. Temos:*

i. se $A \subset B$, então $A \oplus C \subset B \oplus C$;

ii. se $A \subset B$ e $Z(0) \subset C$, então $A \odot C \subset B \odot C$;

iii. se $A \subset B$ e $C \subset Z(0)$, então $B \odot C \subset A \odot C$.

Demonstração. Seja $r \in A \oplus C$. Então existem $p \in A$ e $q \in C$ tais que $r = p + q$. Ora, $A \subset B$ e, portanto, $p \in B$. Segue que $A \oplus C \subset B \oplus C$.

Do item (i), tomando $C = \ominus A$, obtemos $Z(0) \subset B \oplus (\ominus A)$. Graças à Observação 3.15 temos $Z(0) \subset (B \oplus (\ominus A)) \odot C = (B \odot C) \oplus (\ominus A) \odot C$. Somando $A \odot C$, novamente do item (i), obtemos (ii).

O último item se demonstra de maneira análoga a (ii). ■

Terminaremos esta seção com uma importante proposição sobre a função Z .

PROPOSIÇÃO 3.24. *A função Z é injetiva. Além disto Z é um homomorfismo de corpos ordenados, i.e., para todo $p, q \in \mathbb{Q}$ temos:*

i. $p \leq q$ se, e somente se, $Z(p) \subset Z(q)$;

ii. $Z(p + q) = Z(p) \oplus Z(q)$;

iii. $Z(p \cdot q) = Z(p) \odot Z(q)$.

Demonstração. A injetividade de Z e a Propriedade (i) são triviais.

Vamos mostrar (ii). Seja $r \in Z(p + q)$, i.e., $r < p + q$. Temos

$$r = \left(p + \frac{r - p - q}{2} \right) + \left(q + \frac{r - p - q}{2} \right).$$

Vemos que $r - (p + q) < 0$ e, portanto, $p + (r - p - q)/2 < p$. Segue que $p + (r - p - q)/2 \in Z(p)$. Analogamente, $q + (r - p - q)/2 \in Z(q)$. Concluimos que $r \in Z(p) \oplus Z(q)$. Tomemos agora $r \in Z(p) \oplus Z(q)$ e sejam $s \in Z(p)$ e $t \in Z(q)$ tais que $r = s + t$. Como $s < p$ e $t < q$, temos $r = s + t < p + q$. Concluimos que $r \in Z(p + q)$.

Note que aplicando o item (ii) a $q = -p$ obtemos $Z(0) = Z(p) \oplus Z(-p)$ e, portanto, $\ominus Z(p) = Z(-p)$.

(iii) Suponhamos inicialmente $p \geq 0$ e $q \geq 0$, de modo que $Z(0) \subset Z(p) \cap Z(q)$. Seja $r \in Z(p \cdot q)$, i.e., $r < p \cdot q$. Se $r < 0$, então temos imediatamente $r \in Z(p) \odot Z(q)$. Suponhamos $r \geq 0$. Teremos então $p > 0$ e $q > 0$. Seja $s = (r + p \cdot q)/2$, de modo que $r < s < p \cdot q$. Temos

$$r = \left(p \cdot \frac{r}{s} \right) \cdot \left(q \cdot \frac{s}{p \cdot q} \right).$$

Vemos que $r/s < 1$ e, portanto, $pr/s < p$. Segue que $pr/s \in Z(p)$. Da mesma maneira $q \cdot s/(p \cdot q) \in Z(q)$. Concluimos que $r \in Z(p) \odot Z(q)$. Seja agora $r \in Z(p) \odot Z(q)$. Se $r < 0$, então trivialmente temos $r \in Z(p \cdot q)$. Suponhamos $r \geq 0$. Existem $s \in Z(p)$ e $t \in Z(q)$ tais

que $r = s \cdot t$, $s \geq 0$ e $t \geq 0$. De $0 \leq s < p$ e $0 \leq t < q$, graças à monotonia da multiplicação, obtemos $s \cdot t \leq p \cdot t < p \cdot q$. Concluimos que $r \in Z(p \cdot q)$.

O caso geral (p e q não necessariamente positivos) segue do que acabamos de demonstrar usando a regra dos sinais e o fato que $\ominus Z(p) = Z(-p)$. ■

Uma propriedade fundamental de $(\Omega, \oplus, \odot, \subset)$ é a chamada **completeza**. Antes de enunciá-la precisamente, vamos interpretar a Definição 2.25 de subconjunto limitado superiormente em $(\Omega, \oplus, \odot, \subset)$. Um conjunto $\Gamma \subset \Omega$ é limitado superiormente pela cota superior $S \in \Omega$ se $A \subset S$ para todo $A \in \Gamma$.

A próxima definição, com adaptação óbvia, tem sentido em qualquer corpo ordenado. Porém, nos limitaremos a $(\Omega, \oplus, \odot, \subset)$.

DEFINIÇÃO 3.25. *Seja $\Gamma \subset \Omega$, não vazio. Se existir $S \in \Omega$ que seja a menor cota superior de Γ , isto é,*

- i. $A \subset S$ para todo $A \in \Gamma$;*
- ii. se R é cota superior de Γ , então $S \subset R$;*

*então dizemos que S é **supremo** (finito) de Γ , e escrevemos $\sup \Gamma = S$. Quando Γ é ilimitado superiormente (não existe cota superior para Γ), dizemos que o **supremo** de Γ é mais infinito e escrevemos $\sup \Gamma = +\infty$.*

EXEMPLO 3.26. *Seja $\Gamma = \{A \in \Omega ; A \subset Z(0)\}$. É imediato que $Z(0)$ é cota superior de Γ e, portanto, Γ é limitado superiormente. Também é imediato que $Z(0)$ é o supremo de Γ .*

TEOREMA 3.27. *O corpo ordenado $(\Omega, \odot, \oplus, \subset)$ é **completo**, i.e., todo subconjunto de Ω não vazio e limitado superiormente tem supremo finito.*

Demonstração. *Seja $\Gamma \subset \Omega$ não vazio e limitado superiormente e seja S a união de todos os elementos de Γ , i.e.,*

$$S = \bigcup_{A \in \Gamma} A.$$

É imediato que $A \subset S$ para todo $A \in \Gamma$ e também que $S \subset M$ quando $M \in \Omega$ que é cota superior de Γ . Logo, basta mostrar que S é corte para concluir que S é o supremo de Γ .

Claramente $S \neq \emptyset$. Seja $M \in \Omega$ uma cota superior de Γ . Temos que $S \subset M$ e, portanto, que $M^{\odot} \subset S^{\odot}$. Em particular, temos que $S^{\odot} \neq \emptyset$.

Seja $p \in S$ e $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < p$. Sendo $p \in S$ temos que existe $A \in \Gamma$ tal que $p \in A$. Ora, A é corte, logo, $r \in A$ e existe $q \in A$ tal que $p < q$. Como $A \subset S$, temos $r \in S$ e $q \in S$. Concluimos a prova de que S é corte. ■

Terminamos nossa tarefa de mostrar que $(\Omega, \oplus, \odot, \subset)$ é um corpo ordenado completo. A partir de agora, vamos mudar as notações e nomenclaturas. Um corte será chamado de **número real**, o conjunto Ω passa a ser denotado \mathbb{R} e será chamado de **conjunto dos números reais**. Os símbolos \oplus e \odot serão substituídos por $+$ e \cdot respectivamente. E, em se tratando de cortes, passamos a escrever $x \leq y$ ao invés de $x \subset y$. Observamos que, rigorosamente falando, um número racional não é número real. De fato, um número racional é um elemento do conjunto \mathbb{Q} enquanto que um número real é um subconjunto de \mathbb{Q} . No entanto, através da função Z (Definição 3.3) passamos de um número racional r ao número real $Z(r)$. Sendo Z injetiva (ver Proposição 3.24) temos que o conjunto $Z(\mathbb{Q})$ é um subconjunto de \mathbb{R} que é uma espécie de “cópia” ou “clone” de \mathbb{Q} . Esta noção é precisada matematicamente pelo fato de Z ser um homomorfismo injetivo (ver Proposição 3.24). Por esta razão, podemos, e faremos, os seguintes abusos de notação e de linguagem: “ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ” ou “todo número racional é número real”. E ainda, $Z(0)$ passa a ser notado 0 , $Z(1)$ passa a ser notado 1 , etc.

3.3 Números reais.

Na Seção 3.2 definimos um corpo ordenado completo $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ dito dos números reais e tal que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Daqui por diante, não precisaremos nos servir da definição de número real. Tudo que precisamos saber é que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado completo, isto é, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ satisfaz as propriedades da Definição 2.20, além disto, a relação \leq em \mathbb{R} satisfaz as condições da Definição 2.23 e, finalmente, vale a completeza dada pelo Teorema 3.30 abaixo.

DEFINIÇÃO 3.28. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, não vazio. Se existir $s \in \mathbb{R}$ que seja a menor cota superior de A , isto é,*

- i. $a \leq s$ para todo $a \in A$;*
- ii. se r é cota superior de A , então $s \leq r$;*

*então dizemos que s é **supremo** (finito) de A , e escrevemos $\sup A = s$. Quando A é ilimitado superiormente (não existe cota superior para A) dizemos que o **supremo** de A é mais infinito e escrevemos $\sup A = +\infty$.*

DEFINIÇÃO 3.29. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, não vazio. Se existir $i \in \mathbb{R}$ que seja a maior cota inferior de A , isto é,*

- i. $i \leq a$ para todo $a \in A$;*
- ii. se r é cota inferior de A , então $r \leq i$;*

então dizemos que i é **ínfimo** (finito) de A , e escrevemos $\inf A = i$. Quando A é ilimitado inferiormente (não existe cota inferior para A), dizemos que o **ínfimo** de A é menos infinito e escrevemos $\inf A = -\infty$.

TEOREMA 3.30. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, não vazio. Se A é limitado superiormente, então A tem supremo finito. Se A é limitado inferiormente então A tem ínfimo finito.*

Demonstração. Observamos que as definições 3.28 e 3.25 são equivalentes, diferindo apenas na notação. Da mesma forma, a primeira afirmação do Teorema 3.30 é uma nova versão do Teorema 3.27.

A segunda afirmação do Teorema 3.30 é consequência da primeira. De fato, verifica-se facilmente que se A é limitado inferiormente, então $B = \{-x ; x \in A\}$ é limitado superiormente e $\inf A = -\sup B$. ■

Um número real que não é racional é dito **número irracional**. O Exercício (1.c) da Seção 3.4 mostra a existência de um número irracional. Vamos considerar uma variação deste exemplo.

EXEMPLO 3.31. *Sejam $A = \{p \in \mathbb{R} ; p < 0 \text{ ou } p^2 < 2\}$ e $B = \{q \in \mathbb{R} ; q > 0 \text{ e } q^2 > 2\}$. Claramente, A e B são não vazios.*

Segue facilmente das definições que A é limitado superiormente e que B é limitado inferiormente. Mais precisamente, qualquer elemento de A é menor que qualquer elemento de B .

Pelo Teorema 3.30 existem $r, s \in \mathbb{R}$ com $r = \sup A$ e $s = \inf B$. É imediato que $r, s \geq 0$. Como $p \leq q$ para todo $p \in A$ e $q \in B$, temos que $r \leq s$ e, portanto, $r^2 \leq s^2$.

Vamos mostrar que B não possui elemento mínimo. Seja $q \in B$. Temos $q > 0$ e $q^2 - 2 > 0$, de modo que podemos tomar $h \in \mathbb{R}$ tal que $h < q$ e

$$0 < h < \frac{q^2 - 2}{2q}.$$

Temos $2qh - h^2 < 2qh < q^2 - 2$ e, portanto, $(q - h)^2 > 2$. Logo, $q - h$ é um elemento de B estritamente menor que q . Em particular, q não é elemento mínimo de B . De modo análogo, mostra-se que A não possui elemento máximo.

Temos que $s^2 \leq 2$ pois, senão, s seria elemento mínimo de B . Analogamente, mostra-se que $r^2 \geq 2$. Concluímos que $r^2 = s^2 = 2$.

*Este exemplo mostra que, graças à completeza, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 0$ e $r^2 = 2$. Veremos posteriormente, que existe um único número com esta propriedade (chamado **raiz de 2** e denotado por $\sqrt{2}$). Porém, como não existe nenhum racional com esta propriedade ($\sqrt{2}$ é irracional) concluímos que $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ não é completo.*

PROPOSIÇÃO 3.32. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ é arquimediano.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que \mathbb{N} seja limitado superiormente e seja $s = \sup \mathbb{N}$. Temos que $n \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $n + 1 \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $n \leq s - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $s - 1$ é cota superior para \mathbb{N} que é menor que $s = \sup \mathbb{N}$. Absurdo. ■

DEFINIÇÃO 3.33. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Um **intervalo** é um subconjunto de \mathbb{R} de qualquer uma das formas abaixo:

- i. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$;
- ii. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x < b\}$;
- iii. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$;
- iv. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a < x \leq b\}$;
- v. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x\}$;
- vi. $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} ; a < x\}$;
- vii. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} ; x \leq b\}$;
- viii. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} ; x < b\}$;
- ix. $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Quando $a = b$, temos $[a, a] = \{a\}$ e $[a, a) = (a, a) = (a, a] = \emptyset$. Logo, o conjunto vazio e conjuntos unitários são intervalos. Estes dois tipos de intervalo são ditos **degenerados** enquanto que os outros são ditos **não degenerados**.

Intervalos dos tipos (iii), (vi), (viii) e (ix) são ditos **abertos**. O intervalo \emptyset e os intervalos dos tipos (i), (v), (vii) e (ix) são ditos **fechados**.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. O símbolo (a, b) é ambíguo pois representa ao mesmo tempo um intervalo e um par ordenado. Isto poderia ser fonte de confusão (por isto alguns autores usam a notação $]a, b[$ para intervalos). Porém, fazendo as coisas como elas devem ser feitas, isto é, sendo preciso nas argumentações, de acordo com o contexto entende-se imediatamente qual das duas possibilidades é a correta. Por exemplo, na afirmação $1 \in (0, 1)$ fica claro que $(0, 1)$ representa um intervalo, mesmo sendo falsa a afirmação. Por outro lado, ao considerarmos $(0, 1)$ como um par ordenado, ambas as afirmações $1 \in (0, 1)$ e $1 \notin (0, 1)$ não têm sentido, e portando não cabe a questão de saber qual delas é correta.

De acordo com a Definição 3.33, os conjunto \mathbb{R} e \emptyset são intervalos abertos e fechados ao mesmo tempo. Isto não deve causar nenhuma confusão já que \mathbb{R} e \emptyset não são portas. Acabamos de ver as definições matemáticas de *intervalo aberto* e de *intervalo fechado*. Mesmo se as palavras *aberto* e *fechado* têm outros sentidos na vida comum, são os sentidos da Definição 3.33 que serão usados ao longo de todo o texto. Observe que, por definição, \mathbb{R}

e \emptyset são os únicos intervalos que possuem esta propriedade. Perceba também que existem intervalos que não são abertos nem fechados.

O próximo teorema é outra consequência da completeza.

TEOREMA 3.34. (Dos Intervalos Encaixantes) *Se $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de intervalos encaixantes, i.e., $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.*

Demonstração. Seja $A = \{a_m ; m \in \mathbb{N}\}$. De $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ obtemos que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Daí, segue facilmente que $a_m \leq b_n$ quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, qualquer b_n é cota superior de A . Pelo Teorema 3.30 existe $s = \sup A$. Mostremos que $s \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos que s é cota superior de A , logo, $s \geq a_n$. Além disto, s é a menor cota superior de A , portanto, $s \leq b_n$. Concluimos que $a_n \leq s \leq b_n$, ou seja, $s \in [a_n, b_n]$. ■

Já vimos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Vamos mostrar agora que na verdade “existem mais números irracionais do que racionais”. Mais precisamente, na próxima proposição mostraremos que $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$. Como consequência, obtemos $\#\mathbb{Q} < \#(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. De fato, se fosse $\#(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \leq \#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$, então, como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, teríamos $\#\mathbb{R} \leq \#\mathbb{N}$ (veja a Proposição 2.17).

PROPOSIÇÃO 3.35. *O conjunto \mathbb{R} não é enumerável, ou seja, $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$.*

Demonstração. Devemos mostrar que não existe função sobrejetiva de \mathbb{N} em \mathbb{R} ou, de maneira equivalente, que qualquer função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetiva.

Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $I_1 = [a_1, d_1]$ um intervalo fechado tal que $f(1) \notin I_1$. Dividimos este intervalo em três partes da seguinte maneira: tomamos $b_1, c_1 \in I_1$ tais que $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$ e assim obtemos $I_1 = [a_1, b_1] \cup [b_1, c_1] \cup [c_1, d_1]$. Certamente $f(2)$ não pertence a algum destes três intervalos que denotaremos I_2 . Repetimos o processo com o intervalo I_2 : o dividimos em três partes e definimos I_3 como sendo uma destas partes tal que $f(3) \notin I_3$. Continuando indefinidamente este processo, construímos uma família $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos fechados e limitados tais que $I_n \supset I_{n+1}$ e $f(n) \notin I_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.34 existe s tal que $s \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue imediatamente que $s \neq f(n)$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ e portanto f não é sobrejetiva. ■

3.4 Exercícios.

1 - Seja $A = \{p \in \mathbb{Q} ; p < 0 \text{ ou } p^2 < 2\}$. Mostre que

- A é corte;
- $A \odot A \subset Z(2)$;

c) Não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $Z(r) = A$.

Sugestão: (1.a) Seja $p \in A$ tal que $p \geq 0$. Mostre que se $h < 1$ é bem escolhido, então tomando $q = p + h$ teremos $q \in A$ e $p < q$.

(1.c) Proceda por absurdo e, usando a Proposição 3.24, conclua que se $Z(r) = A$ com $r \in \mathbb{Q}$ então $r^2 = 2$.

2 - O objetivo deste exercício é dar outra demonstração para o Teorema 3.27. Seja $\Gamma \subset \Omega$ não vazio e limitado superiormente e seja S a interseção de todas as cotas superiores de Γ , *i.e.*,

$$S = \bigcap_{M \in \Sigma} M,$$

sendo $\Sigma = \{M \in \Omega ; M \text{ é cota superior de } \Gamma\}$. Sem usar o Teorema 3.27, mostre que

- S é corte;
- S é cota superior de Γ ;
- S é subconjunto de toda cota superior de Γ .

Conclua que S é o supremo de Γ .

3 - Lembremos que o **módulo** de $x \in \mathbb{R}$, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Mostre que se $x, y, z, \varepsilon \in \mathbb{R}$, sendo $\varepsilon > 0$, então

- $|x| = \max\{x, -x\}$;
- $|xy| = |x||y|$;
- $|x - y| < \varepsilon \iff x \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$;
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Cada uma das três desigualdades acima é conhecida como **Desigualdade Triangular**.

4 - Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Mostre que I é limitado se, e somente se, existe $a > 0$ tal que $I \subset (-a, a)$.

5 - Seja $A \subset \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente. Mostre que $s = \sup A$ se, e somente se:

- s é cota superior de A ;

ii. se $r < s$ então existe $x \in A$ tal que $r < x \leq s$.

6 - Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$. Definimos $rA = \{rx ; x \in A\}$. Mostre que se A é limitado e não vazio, então rA é limitado e não vazio. Diga quando a recíproca é verdadeira e dê um exemplo onde ela é falsa. Sob que condições temos $\sup rA = r \sup A$? Diga o que acontece no caso contrário.

7 - Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$, não vazios e limitados tais que $A \subset B$. Prove que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

8 - Dado $A \subset \mathbb{R}$, sua **função característica** $\chi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\chi_A(x) = 1$, se $x \in A$, e $\chi_A(x) = 0$, se $x \notin A$. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Mostre que

- a) $A \subset B$ se, e somente se, $\chi_A \leq \chi_B$;
- b) $\chi_{A \cup B} \leq \chi_A + \chi_B$, valendo a igualdade se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$;
- c) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

9 - Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas e tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$. Mostre:

- a) $\sup\{f(x) ; x \in A\} \leq \sup\{g(x) ; x \in A\}$;
- b) $\inf\{f(x) ; x \in A\} \leq \inf\{g(x) ; x \in A\}$;
- c) $\sup\{-f(x) ; x \in A\} = -\inf\{f(x) ; x \in A\}$;
- d) $\inf\{-f(x) ; x \in A\} = -\sup\{f(x) ; x \in A\}$.

10 - Seja $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ como no Teorema 3.34. Mostre que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$ é um intervalo fechado.

Capítulo 4

Seqüências e séries

4.1 Seqüências e subseqüências.

A Definição 1.30 tratou do conceito de seqüências, em geral, e de seqüências de números reais, em particular. A próxima definição é apenas uma revisão.

DEFINIÇÃO 4.1. *Uma seqüência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual denotamos o valor de x em n por x_n em vez de $x(n)$.*

Geralmente usamos a notação $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para representar uma seqüência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Às vezes a notaremos também por $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Dizemos que x_n é o **termo de ordem n** ou que x_n é o **n -ésimo termo** da seqüência.

Quando quisermos explicitar que a imagem da seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está contida em $A \subset \mathbb{R}$ escreveremos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$.

Como seqüências são funções, as definições de função limitada, crescente, decrescente, monótona, etc, também fazem sentido para seqüências.

EXEMPLO 4.2. *Seja $a \in \mathbb{R}$ e tomemos $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é constante. É imediato que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.*

EXEMPLO 4.3. *A seqüência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ é limitada mas não é monótona.*

EXEMPLO 4.4. *Sejam $a, r \in \mathbb{N}$. Considere $x_1 = a$, $x_2 = a + r$, $x_3 = a + 2r$, de maneira geral, $x_n = a + (n - 1)r$. A seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma **Progressão Aritmética** de primeiro termo a e razão r . Se $r = 0$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é constante e, portanto, limitada. Se $r > 0$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é estritamente crescente e, portanto, limitada inferiormente. Finalmente, se $r < 0$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é estritamente decrescente e, portanto, limitada superiormente.*

DEFINIÇÃO 4.5. Dizemos que $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma **subseqüência** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se existe uma seqüência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $y_k = x_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

EXEMPLO 4.6. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a Progressão Aritmética de termo inicial a e razão r . A Progressão Aritmética $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de termo inicial a e razão $2r$ é uma subseqüência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De fato, tomando $n_k = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$) obtemos

$$x_{n_k} = a + (n_k - 1)r = a + (2k - 2)r = a + (k - 1)(2r) = y_k.$$

4.2 Seqüências convergentes.

Intuitivamente, uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente para x se seus termos se aproximam de x quando n cresce. Esta idéia não está de todo errada. Porém, ela pode induzir a uma idéia equivocada de convergência. Somos tentados a dizer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x quando a distância entre x_n e x diminui à medida que n cresce, ou seja, a função $f(n) = |x_n - x|$ é decrescente. Não é bem assim. Veja a Figura 4.1. Ela foge um pouco do assunto “seqüências em de números reais” mas ilustra bem o que queremos dizer por “se aproximar”. Imagine que, partindo do ponto A , percorremos no sentido anti-horário o caminho desenhado como indicado pelas setas. Ninguém duvida, e com razão, de que estaremos assim nos aproximando do ponto O . Porém, a idéia de que a nossa distância ao ponto O decresce com o tempo mostra-se errada. Convença-se disto percebendo que passamos primeiro por B antes de chegar a C e, entretanto, o segmento \overline{BO} é menor que o segmento \overline{CO} . De fato, a distância a O cresce quando percorremos o segmento \overline{BC} . Podemos perceber que existem muitos trechos do caminho sobre os quais a distância a O é crescente com o tempo, de modo que não existe nenhum ponto a partir do qual a distância a O passe a ser decrescente com o tempo.

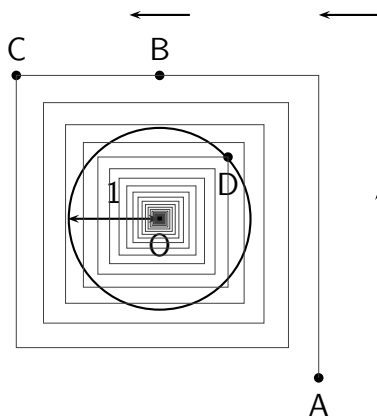


Figura 4.1: Espiral da convergência

Continuemos analisando a Figura 4.1 em busca da boa definição de convergência. Observamos que nossa distância a O fica tão pequena quanto quisermos, bastando para isto que continuemos andando por um tempo suficientemente longo. Por exemplo, nossa distância a

O será menor que 1 depois que passarmos pelo ponto D . Ou seja, em certo instante entramos na bola de raio 1 centrada em O e dela não saímos mais. Da mesma forma, a partir de outro instante (futuro) entramos na bola de raio $1/2$, centrada em O , e aí ficamos. De modo geral, dado qualquer número positivo ε , existe um instante a partir do qual nossa distância a O será menor que ε . Aí está a definição. Para seqüências de números reais ela é expressa da seguinte maneira.

DEFINIÇÃO 4.7. Uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita **convergente** se existe $x \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \implies |x_n - x| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $x_n \rightarrow x$ e dizemos que x é **limite** da seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou que x_n **converge para** (ou **tende a**) x quando n tende a mais infinito ($n \rightarrow +\infty$). Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é convergente, então dizemos que ela é **divergente**.

EXEMPLO 4.8. Seja $x \in \mathbb{R}$ e considere a seqüência dada por $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que $x_n \rightarrow x$. De fato, $|x_n - x| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, podemos escrever

$$\forall \varepsilon > 0, n \geq 1 \implies |x_n - x| < \varepsilon.$$

EXEMPLO 4.9. Considere a seqüência $x_n = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $x_n \rightarrow 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 1/\varepsilon$. Temos então $0 < 1/N < \varepsilon$. Mas se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq N$, então $x_n = 1/n \leq 1/N = x_N$. Logo, podemos escrever

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \implies |x_n - 0| < \varepsilon.$$

O leitor talvez conheça a notação $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ para $x_n \rightarrow x$. Vamos refletir sobre ela. Por enquanto, façamos de conta que não conhecemos a definição de limite. Suponhamos que ao abrir um livro de Análise, pela primeira vez, encontremos as seguintes inscrições:

$$x_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad x_n \rightarrow 1.$$

Não ficaríamos chocados. Porém, se estivesse escrito

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

Seríamos levados a concluir que $0 = 1$. Ora, é o sinal de igual “=” que nos leva a esta confusão. Se não tivermos a unicidade do limite, então a notação $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ é fortemente enganosa. Apenas para constar, informo ao leitor interessado a definição de convergência num contexto mais geral (de espaços topológicos), do qual a nossa é um caso particular, permite a não unicidade do limite (isto ocorre em espaços que não são de Hausdorff¹). Entretanto, a próxima proposição nos dará direito ao uso da notação $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

¹Felix Hausdorff: * 08/11/1868, Wroclaw, Polônia - † 02/01/1942, Bonn, Alemanha.

PROPOSIÇÃO 4.10. *Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência e $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$. Então $x = y$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $x \neq y$. Seja $\varepsilon = |x - y|/2 > 0$. Como $x_n \rightarrow x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |x_n - x| < \varepsilon.$$

Também temos $x_n \rightarrow y$. Logo, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N' \implies |x_n - y| < \varepsilon.$$

Seja n o maior dos números N e N' . Para tal n as duas conclusões anteriores são válidas. Temos então

$$|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |x - y|.$$

Concluimos que $|x - y| < |x - y|$, o que é absurdo. ■

PROPOSIÇÃO 4.11. *Uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende a x se, e somente se, toda subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende a x .*

Demonstração. Suponhamos que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \rightarrow x$. Seja $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, i.e., $y_k = x_{n_k}$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) para alguma seqüência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estritamente crescente. Mostremos que $y_k \rightarrow x$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $x_n \rightarrow x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \varepsilon$. Como $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ é estritamente crescente, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq K$, então $n_k \geq N$. Segue que

$$k \geq K \implies |y_k - x| < \varepsilon.$$

Portanto $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para x . A recíproca é imediata (basta observar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é subsequência de si mesma). ■

EXEMPLO 4.12. *A seqüência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ é divergente. De fato, se ela fosse convergente, então pela proposição anterior todas as suas subsequências seriam convergentes para o mesmo limite. Porém, $(1, 1, 1, \dots)$ e $(0, 0, 0, \dots)$ são duas de suas subsequências sendo que a primeira converge para 1 enquanto que a segunda converge para 0.*

Como corolário da proposição anterior, obtemos que se x_n tende a x , então x_{n+2006} tende a x . Não há nada de especial com o número 2006. Mais geralmente, fixado $p \in \mathbb{N}$, temos que se x_n tende a x , então x_{n+p} tende a x . É fácil perceber que a recíproca também é verdadeira, ou seja, se para algum $p \in \mathbb{N}$ temos que x_{n+p} tende a x , então é porque x_n tende a x . Verifique! A importância deste fato é a seguinte. Se conhecermos alguma propriedade que garanta a convergência de uma seqüência e soubermos que tal propriedade só é válida a partir do seu p -ésimo termo então, ainda sim, podemos concluir que a seqüência é convergente. Vejamos um exemplo esclarecedor.

EXEMPLO 4.13. Sabemos que seqüências constantes são convergentes. Considere a seqüência (não constante) dada por $x_n = \lfloor 1000/n \rfloor$, sendo $\lfloor x \rfloor$ a função **Parte Inteira** de x , definida abaixo:

$$\lfloor x \rfloor = m \quad \text{se} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad m \leq x < m + 1.$$

É fácil ver que $x_n = 0$ para todo $n > 1000$. Ou seja, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é constante a partir do seu milésimo-primeiro termo. Concluimos que ela é convergente.

TEOREMA 4.14. Toda seqüência convergente é limitada.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência convergente para $x \in \mathbb{R}$. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de seqüência convergente, concluimos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < 1$, i.e., $x_n \in (x - 1, x + 1)$. Tomando

$$a = \min\{x_1, \dots, x_N, x - 1\} \quad \text{e} \quad b = \max\{x_1, \dots, x_N, x + 1\}$$

temos imediatamente que $x_n \in [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. ■

4.3 Seqüências monótonas e seqüências limitadas.

A recíproca do Teorema 4.14 é falsa como mostra o Exemplo 4.12. Porém, existem algumas recíprocas parciais que veremos nesta seção. Muitos dos resultados aqui apresentados utilizam, em sua demonstração, a caracterização do supremo vista no Exercício 5 do Capítulo 3.

PROPOSIÇÃO 4.15. Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e limitada superiormente, então $x_n \rightarrow \sup\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Da mesma forma, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente e limitada inferiormente, então $x_n \rightarrow \inf\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração. Vamos provar apenas a primeira parte da proposição já que a segunda se demonstra de modo análogo. Seja $s = \sup\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon < x_N \leq s$. Logo, para $n \geq N$, temos $x - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq s$. Concluimos daí que $|x_n - s| < \varepsilon$. ■

TEOREMA 4.16. (Bolzano¹-Weierstrass²) Toda seqüência limitada possui subsequência convergente.

¹Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano: * 05/10/1781, Praga, República Tcheca - † 18/12/1848, Praga, República Tcheca.

²Karl Theodor Wilhelm Weierstrass: * 31/10/1815, Ostenfelde, Alemanha - † 19/02/1897, Berlim, Alemanha.

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada. Considere o seguinte conjunto:

$$N = \{n \in \mathbb{N} ; x_n > x_m, \forall m > n\}.$$

Existem duas possibilidades: N é infinito ou N é finito.

1º caso: N é infinito.

Escrevamos $N = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ com $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Assim, se $i < j$ então $n_i < n_j$ e, como $n_i \in N$, obtemos que $x_{n_i} > x_{n_j}$. Concluimos que a subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é decrescente. Sendo ela limitada obtemos, finalmente, que ela é convergente.

2º caso: N é finito.

Como N é finito, existe $n_1 \in \mathbb{N} \setminus N$ cota superior de N . Ora, $n_1 \notin N$ logo, existe $n_2 > n_1$ (e portanto $n_2 \notin N$) tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$. Mas de $n_2 \notin N$ segue que existe $n_3 > n_2$ (e portanto $n_3 \notin N$) tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Por indução, definimos uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que é crescente e, portanto, convergente (pois ela é limitada). ■

4.4 Seqüências de Cauchy.

DEFINIÇÃO 4.17. Uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita de **Cauchy**¹ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m \geq N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Uma seqüência é de Cauchy se seus termos se aproximam uns dos outros. Repare que não apenas termos consecutivos mas sim todos eles. É natural acreditar que qualquer seqüência convergente é de Cauchy e vice-versa. Vamos admitir, por hora, que seqüências convergentes são de Cauchy (este fato será demonstrado a seguir). Façamos alguns comentários sobre a recíproca.

Considere uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números racionais convergente para, por exemplo, $\sqrt{2}$ (existe tal seqüência?). Sendo convergente ela é de Cauchy. Como a definição de seqüência de Cauchy não faz menção ao limite, mesmo se só conhecêssemos números racionais ainda estaríamos de acordo que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Porém, neste caso, não seríamos capazes de mostrar a existência do limite. Ou seja, se considerássemos apenas números racionais, não seria possível mostrar que toda seqüência de Cauchy é convergente.

Já que seqüências de Cauchy são convergentes em \mathbb{R} mas não em \mathbb{Q} , isto deve estar relacionado à completeza. De fato, alguns autores usam seqüências de Cauchy de números racionais para construir \mathbb{R} . A vantagem desta construção é que ela pode ser empregada para “completar” outros conjuntos (ou melhor, espaços métricos) que não sejam corpos ordenados.

TEOREMA 4.18. Uma seqüência é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy.

¹Augustin Louis Cauchy: ✱ 21/08/1789, Paris, França - † 23/05/1857, Sceaux, França.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência convergente para o limite x . Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Portanto, se $m, n \geq N$ temos

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Concluimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy.

Reciprocamente, suponhamos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Um argumento análogo ao da demonstração do Teorema 4.14 mostra que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada (verifique). Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem subseqüência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente para o limite x . Mostremos que $x_n \rightarrow x$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.1)$$

Como $x_{n_k} \rightarrow x$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq N$ e $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$. Daí e de (4.1) segue que, se $n \geq N$, então

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

4.5 Limites infinitos.

Existem seqüências divergentes que possuem limite! Isto é apenas um jogo de palavras. A definição seguinte diz que certas seqüências têm limites que não são números reais. Não diremos que tais seqüências são convergentes.

DEFINIÇÃO 4.19. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência. Dizemos que x_n tende a **mais infinito** quando n tende a mais infinito ou que **mais infinito** é limite da seqüência e escrevemos $x_n \rightarrow +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ se,*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \implies x_n > M.$$

DEFINIÇÃO 4.20. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência. Dizemos que x_n tende a **menos infinito** quando n tende a mais infinito ou que **menos infinito** é limite da seqüência e escrevemos $x_n \rightarrow -\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$ se,*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \implies x_n < M.$$

Insistimos no fato que se $x_n \rightarrow +\infty$ ou $x_n \rightarrow -\infty$, então não podemos dizer que a seqüência é convergente. Uma seqüência é dita convergente exclusivamente quando satisfaz a condição da Definição 4.7. Além disto, se $x_n \rightarrow +\infty$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente e, portanto, é divergente. Da mesma forma, se $x_n \rightarrow -\infty$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada inferiormente e, portanto, é divergente.

OBSERVAÇÃO 4.21. Com estas convenções sobre uso dos termos “seqüência convergente” e de “limite de seqüência” a Proposição 4.11 também é válida (obviamente com outra demonstração) se substituirmos x por $+\infty$ ou por $-\infty$.

Como $x_n > M$ é equivalente a $-x_n < -M$, temos que $x_n \rightarrow +\infty$ se, e somente se, $-x_n \rightarrow -\infty$. Portanto toda afirmação sobre limite mais infinito tem uma análoga para limite menos infinito.

4.6 Operações com limites.

Temos a seguir algumas propriedades aritméticas de limites finitos.

PROPOSIÇÃO 4.22. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes para x e y , respectivamente, e $c \in \mathbb{R}$. Temos:

i. $x_n + y_n \rightarrow x + y$;

ii. $x_n \cdot y_n \rightarrow x \cdot y$;

iii. $c \cdot x_n \rightarrow cx$;

iv. se $y \neq 0$, então $y_n^{-1} \rightarrow y^{-1}$.

Demonstração. (i) Seja $\varepsilon > 0$. Graças às convergências de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existem N' e N'' tais que, se $n \geq N'$, então $|x_n - x| < \varepsilon/2$, e se $n \geq N''$, então $|y_n - y| < \varepsilon/2$. Seja $N = \max\{N', N''\}$. Assim, se $n \geq N$, então $n \geq N'$ e $n \geq N''$ e, daí,

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Mostramos assim que $x_n + y_n \rightarrow x + y$.

(ii) Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, ela é limitada. Logo, existe $C > 0$ tal que $|x_n| < C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \varepsilon$ e $|y_n - y| < \varepsilon$. Desta forma, para $n \geq N$, temos

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - x \cdot y| &\leq |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y| + |x_n \cdot y - x \cdot y| = |x_n| \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x| \\ &\leq C \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x| < (C + |y|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Isto mostra que $x_n \cdot y_n$ converge para $x \cdot y$.

(iii) É consequência do item anterior, tomando $y_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Seja $\varepsilon > 0$ e $N' \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N'$, então $|y_n - y| < \varepsilon$. Temos ainda que $y \neq 0$, conseqüentemente, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que, $|y_n| > |y|/2$, i.e., $|y_n|^{-1} < 2|y|^{-1}$, quando $n \geq N''$. Tomando $N = \max\{N', N''\}$, para todo $n \geq N$, temos que

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n| \cdot |y|} < \frac{2}{|y|^2} \varepsilon.$$

Isto conclui a demonstração. ■

EXEMPLO 4.23. *Seja $r \in \mathbb{R}$. A seqüência $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma Progressão Geométrica de razão r .*

Se $|r| < 1$, então multiplicando por $|r^n| \geq 0$, obtemos $0 \leq |r^{n+1}| \leq |r^n|$. Logo, $(|r^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente, limitada inferiormente e, portanto, convergente para, digamos, l . Ora, $|r^{n+1}| = |r||r^n|$, então, passando o limite, obtemos $l = |r|l$. Como $|r| \neq 1$, temos $l = 0$. Segue, finalmente, que $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 (Exercício (2.a)).

Se $|r| > 1$, então $|r| = 1 + h$ com $h > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, $|r^n| = |r|^n \geq 1 + nh$ e, portanto, $|r^n| \rightarrow +\infty$. Em particular, $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é divergente (Exercício (2.b)).

Deixamos para o leitor o estudo dos casos $r = 1$ e $r = -1$.

Vejamos agora as propriedades “aritméticas” de limites infinitos.

PROPOSIÇÃO 4.24. *Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas seqüências e $c > 0$. Suponhamos que $x_n \rightarrow +\infty$. Temos:*

- i. se $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, então $x_n + y_n \rightarrow +\infty$;*
- ii. se $y_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x_n \cdot y_n \rightarrow +\infty$;*
- iii. $c \cdot x_n \rightarrow +\infty$;*
- iv. $x_n^{-1} \rightarrow 0$.*

Demonstração. (i) Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $M \in \mathbb{R}$, como $x_n \rightarrow +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > M - a$. Segue que se $n \geq N$, então $x_n + y_n \geq x_n + a > M$. Concluimos que $x_n + y_n \rightarrow +\infty$.

(ii) Dado $M \in \mathbb{R}$, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > |M|/c$. Desta forma, se $n \geq N$, então $x_n \cdot y_n \geq x_n \cdot c > |M| \geq M$. Portanto $x_n \cdot y_n \rightarrow +\infty$.

(iii) É conseqüência do item anterior, tomando $y_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > \varepsilon^{-1}$. Segue que se $n \geq N$, então $|x_n^{-1} - 0| = x_n^{-1} < \varepsilon$. Concluimos que $x_n^{-1} \rightarrow 0$. ■

4.7 ★ Limite superior e limite inferior.

No estudo de limites de subsequências é conveniente fazer a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 4.25. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é **valor de aderência** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se existe subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para x .

O Teorema de Bolzano-Weierstrass diz então que toda seqüência limitada possui valor de aderência.

Observe que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então o conjunto dos seus valores de aderência também é limitado superiormente (veja Exercício (4.c)). Analogamente, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, então o conjunto de seus valores de aderência também é.

DEFINIÇÃO 4.26. Seja A o conjunto dos valores de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. O **limite superior** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é definido por

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é ilimitada superiormente;} \\ \sup A & \text{se } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada superiormente e } A \neq \emptyset; \\ -\infty & \text{se } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada superiormente e } A = \emptyset. \end{cases}$$

O **limite inferior** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é definido por

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é ilimitada inferiormente;} \\ \inf A & \text{se } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada inferiormente e } A \neq \emptyset; \\ +\infty & \text{se } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada inferiormente e } A = \emptyset. \end{cases}$$

Essencialmente, o limite superior de uma seqüência é o seu maior valor de aderência, enquanto que o limite inferior é seu menor valor de aderência.

A Proposição 4.11 diz que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x se, e somente se, x é o único valor de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Isto também pode ser expresso dizendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \iff \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

Pode parecer estranho tomar $-\infty$ como definição de limite superior de uma seqüência limitada superiormente e sem valor de aderência. A razão é que, nestas condições, a seqüência tende a $-\infty$ (veja Exercício 8). Desta forma, o resultado do parágrafo anterior também é válido para limites infinitos.

PROPOSIÇÃO 4.27. Existe subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Em particular, se $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \in \mathbb{R}$, então este é o maior valor de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Demonstração. Seja A o conjunto dos valores de aderência de x_n .

Suponhamos inicialmente que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja ilimitada superiormente e, portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

Neste caso, é imediato que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem subsequência que tende a $+\infty$.

Suponhamos, agora, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja limitada superiormente e $A = \emptyset$. Portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty.$$

Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for limitada inferiormente, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, teremos $A \neq \emptyset$. Logo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada inferiormente e, portanto, tem subsequência tendendo a $-\infty$.

Finalmente, suponhamos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja limitada superiormente e $A \neq \emptyset$. Como já observado antes, A é limitado superiormente e, portanto, seu supremo s é finito. Vamos mostrar que $s \in A$. Aplicando sucessivamente o resultado do Exercício 5 do Capítulo 3 obtemos:

$$\begin{aligned} \exists a_1 \in A \quad \text{tal que} \quad s &\geq a_1 > s - 1; \\ \exists a_2 \in A \quad \text{tal que} \quad s &\geq a_2 > s - 1/2; \\ \exists a_3 \in A \quad \text{tal que} \quad s &\geq a_3 > s - 1/3; \quad \dots \end{aligned}$$

Como a_1 é valor de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $s + 1 > a_1 > s - 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $s + 1 > x_{n_1} > s - 1$. Também temos $a_2 \in A$, logo, existe $n_2 > n_1$ tal que $s + 1/2 > x_{n_2} > s - 1/2$. Prosseguindo deste forma, construímos uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente para s . Segue que $s \in A$. ■

4.8 Séries.

DEFINIÇÃO 4.28. Considere uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \dots + x_n.$$

A seqüência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita **das somas parciais da série** $\sum x_n$ e x_n é o n -ésimo termo ou **termo geral da série**. Escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

quando o limite acima existe e, neste caso, ele é dito **limite da série**. Dizemos que $\sum x_n$ é **convergente** ou **divergente** se $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente ou divergente, respectivamente. Finalmente, dizemos que $\sum x_n$ é **absolutamente convergente** se a série $\sum |x_n|$ é convergente.

EXEMPLO 4.29. Considere a **Série Geométrica** de termo geral $x_n = r^{(n-1)}$. Temos

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1}.$$

Se $r = 1$, então é imediato que $S_n = n$. Segue que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge e, portanto, $\sum x_n$ diverge. Suponhamos $r \neq 1$. Multiplicando por S_n por r obtemos

$$\begin{aligned} rS_n &= r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n \\ &= 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n - 1 \\ &= S_n + r^n - 1. \end{aligned}$$

Portanto, $S_n = (r^n - 1)/(r - 1)$. Assim, $\sum x_n$ converge se, e somente se, $|r| < 1$ e, neste caso,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \frac{1}{1-r}.$$

A próxima proposição é uma versão da Proposição 4.22 para séries.

PROPOSIÇÃO 4.30. Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries convergentes e $c \in \mathbb{R}$. Temos que

- i. $\sum (x_n + y_n)$ é convergente para $\sum x_n + \sum y_n$;
- ii. $\sum (c \cdot x_n)$ é convergente para $c \cdot \sum x_n$.

Demonstração. A demonstração é trivial: basta aplicar a Proposição 4.22 para as seqüências das somas parciais de $\sum x_n$ e de $\sum y_n$. ■

Observamos que, em geral,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n \cdot y_n) \neq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Passamos ao estudo da natureza de séries, *i.e.*, estamos interessados em critérios que determinem se uma série é convergente ou divergente.

TEOREMA 4.31.

- i. $\sum x_n$ converge se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq m \geq N \implies \left| \sum_{i=m}^n x_i \right| < \varepsilon.$$

- ii. Se $\sum x_n$ converge, então $x_n \rightarrow 0$.

iii. Toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração. (i) O critério dado diz simplesmente que a seqüência das somas parciais é de Cauchy. O resultado segue do Teorema 4.18.

(ii) Segue de (i), tomando $m = n$.

(iii) Observamos que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left| \sum_{i=n}^m x_i \right| \leq \sum_{i=n}^m |x_i| = \left| \sum_{i=n}^m |x_i| \right|$$

Portanto, por (i), a convergência de $\sum |x_n|$ implica a de $\sum x_n$. ■

O item (iii) do teorema anterior está intimamente ligado ao fato de \mathbb{R} ser completo. Devemos ressaltar ainda que a sua recíproca não é verdadeira, ou seja, existem séries que são convergentes mas não absolutamente convergentes. Veremos um exemplo posteriormente.

EXEMPLO 4.32. Pelo item (ii), a condição $x_n \rightarrow 0$ é necessária para a convergência da série $\sum x_n$ porém ela não é suficiente. A **Série Harmônica** $\sum 1/n$ é o contra exemplo mais famoso. De fato, temos

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\ S_4 &= S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{2}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}, \\ S_8 &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto, $S_{2^n} > 1 + n/2$. Daí, segue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2^n} = +\infty$. Concluimos que a série diverge.

Vamos tratar agora de alguns critérios de convergência para séries de termos positivos. Claramente, todos os critérios aqui expostos podem ser adaptados para séries de termos negativos. De fato, se $\sum x_n$ é uma série de termos negativos, então $\sum (-x_n)$ é uma série de termos positivos e, além disto, a primeira converge se, e somente se, a segunda converge.

Eventualmente, podemos usar também critérios sobre séries de termos positivos para uma série $\sum x_n$ que tenha termos de sinais variáveis. Ora, se ao aplicarmos algum destes critérios para a série $\sum |x_n|$ concluirmos que ela é convergente, então, como toda série absolutamente convergente é convergente, concluiremos que $\sum x_n$ converge. Por outro lado, se o critério nada disser, ou mesmo se ele nos informar que $\sum |x_n|$ é divergente, em geral, nada poderemos afirmar sobre a convergência da série $\sum x_n$.

Observamos também o seguinte fato, já mencionado no caso de seqüências. Os primeiros termos de uma série nada influem na sua natureza. De fato, a série $\sum x_n$ converge se, e

somente se, a série $\sum x_{n+2006}$ converge. De maneira geral, fixado $p \in \mathbb{N}$ a série $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, a série $\sum x_{n+p}$ é convergente. Desta forma, todos os critérios que determinam a natureza de uma série através de alguma propriedade verificada por todos os seus termos continuam válidos se a tal propriedade é verificada à partir de algum termo (por exemplo, 2006). Por outro lado, não podemos desprezar nenhum termo de uma série convergente quando estamos interessados em determinar o valor do seu limite.

PROPOSIÇÃO 4.33. *Uma série de termos positivos é convergente se, e somente se, a seqüência de suas somas parciais é limitada superiormente.*

Demonstração. Por definição, $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, a seqüência de suas somas parciais $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. Como $x_n \geq 0$, temos imediatamente que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente. Logo, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente se, e somente se, ela é limitada superiormente (ver proposições 4.14 e 4.15) ■

TEOREMA 4.34. (Critério da Comparação) *Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $0 \leq x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

- i. *Se $\sum y_n$ converge, então $\sum x_n$ converge.*
- ii. *Se $\sum x_n$ diverge, então $\sum y_n$ diverge.*

Demonstração. Sejam $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ as seqüências de somas parciais de $\sum x_n$ e $\sum y_n$, respectivamente. De $x_n \leq y_n$ segue imediatamente que $S_n \leq T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente, então $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também é. Por outro lado, se $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também é. Concluimos graças à Proposição 4.33. ■

EXEMPLO 4.35. *Vamos estudar a natureza da série $\sum 1/n^p$ segundo os valores de p . É claro que se $p \leq 0$, então ela diverge pois neste caso $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \neq 0$.*

Suponhamos $0 \leq p \leq 1$. Temos $1/n \leq 1/n^p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, por comparação com a Série Harmônica, concluimos que a série diverge.

Finalmente, consideremos os caso $p > 1$. Mostraremos que a série converge. Seja $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a seqüência das somas parciais. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^p} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^p} \right) \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} = \sum_{i=1}^n (2^{1-p})^{(i-1)}. \end{aligned}$$

Como $p > 1$ temos $2^{1-p} < 1$ e, portanto, a Série Geométrica de razão 2^{1-p} converge. Segue que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente e portanto $\sum 1/n^p$ é convergente.

TEOREMA 4.36. (Teste da Razão, ou de d'Alembert¹) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de números estritamente positivos.

i. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1}/x_n < 1$, então $\sum x_n$ é convergente.

ii. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1}/x_n > 1$, então $\sum x_n$ é divergente.

Demonstração. (i) Tomemos $r \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1}/x_n < r < 1$. O resultado do Exercício (4.a) garante que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+1}/x_n < r$ para todo $n \geq N$. Temos então

$$\begin{aligned} x_{N+1} &< r x_N; \\ x_{N+2} &< r x_{N+1} < r^2 x_N; \\ x_{N+3} &< r x_{N+2} < r^3 x_N; \\ &\vdots \end{aligned}$$

De maneira geral, $x_n < r^{n-N} x_N$, para todo $n \geq N$. Tomando $y_n = r^{n-N} x_N$ (para todo $n \in \mathbb{N}$) temos que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$. Como $\sum y_n$ é uma Série Geométrica de razão $r \in (0, 1)$, ela é convergente. O resultado segue do Critério de Comparação.

(ii) Usando o resultado do Exercício (4.b) concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+1}/x_n \geq 1$ para todo $n \geq N$. Portanto, $x_{n+1} \geq x_n$ para todo $n \geq N$. Segue que a seqüência dos termos gerais da série é crescente a partir do N -ésimo termo e, portanto, não converge para zero. Logo, a série é divergente. ■

EXEMPLO 4.37. A série $\sum 1/n!$ é convergente pois

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Quando $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1}/x_n = 1$, o Teste da Razão nada permite concluir (nem convergência nem divergência).

Existem várias versões do Teste da Razão. A versão vista aqui não é a mais geral delas. Por exemplo, podemos substituir o símbolo de limite em (i) pelo símbolo de limite superior. A conclusão de (ii) também é válida se substituirmos o símbolo de limite pelo de limite inferior.

¹Jean Le Rond d'Alembert: * 17/11/1717, Paris, França - † 29/10/1783, Paris, França.

EXEMPLO 4.38. Vejamos exemplos para os quais o Teste da Razão não é conclusivo. Considere as séries $\sum 1/n$ e $\sum 1/n^2$. Já vimos que a primeira é divergente enquanto que a segunda é convergente. Porém, para ambas temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1}/x_n = 1$. De fato,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

TEOREMA 4.39. (Teste da Raiz, ou de Cauchy) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de números positivos.

- i. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, então $\sum x_n$ é convergente.
- ii. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, então $\sum x_n$ é divergente.

Demonstração. (i) Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} < r < 1$. Do resultado do Exercício (4.a) obtemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{x_n} < r$, ou seja, $x_n < r^n$ para todo $n \geq N$. O resultado segue por comparação com a Série Geométrica $\sum r^n$.

(ii) Análogo ao item anterior. ■

Quando $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, o Teste da Raiz nada permite concluir (nem convergência nem divergência).

Também existem outras versões do Teste da Raiz. A versão aqui apresentada não é a mais geral delas. Por exemplo, podemos substituir o símbolo de limite em (i) pelo símbolo de limite superior. A conclusão de (ii) também é válida se substituirmos o símbolo de limite pelo de limite inferior.

4.9 ★ A série dos inversos dos primos.

Terminamos o capítulo com um interessante resultado sobre a série dos inversos dos primos. O primeiro a demonstrá-lo foi Euler¹ [7]. A demonstração que apresentaremos aqui é mais uma das preciosidades de Erdős² [6]. O argumento é do tipo combinatório. Antes de apresentá-lo façamos uma definição.

DEFINIÇÃO 4.40. A função **Parte Inteira** é definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, por

$$\lfloor x \rfloor = n \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad n \leq x < n + 1.$$

EXEMPLO 4.41. Temos $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor 1.4 \rfloor = 1$ e $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$.

¹Leonhard Euler: ★ 15/04/1707, Basileia, Suíça - † 18/09/1783 - São Petersburgo, Rússia.

²Paul Erdős: ★ 26/03/1913, Budapeste, Hungria - † 20/09/1996, Warsaw, Polônia.

PROPOSIÇÃO 4.42. *Seja $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a seqüência estritamente crescentes dos números primos ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$). A série $\sum 1/p_n$ diverge.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\sum 1/p_n$ converge. Portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}.$$

Seja $M = 2^{2^N}$. Temos que $M = \#A + \#B$, sendo

$$A = \{m \in \{1, \dots, M\} ; m \text{ é múltiplo de algum dos primos } p_N, p_{N+1}, \dots\},$$

$$B = \{m \in \{1, \dots, M\} ; m \text{ não é múltiplo de nenhum dos primos } p_N, p_{N+1}, \dots\}.$$

Vamos mostrar que $\#A < M/2$ e $\#B \leq M/2$ chegando assim a uma contradição.

O número de múltiplos do primo p que são menores que M é $\lfloor M/p \rfloor$. Segue que

$$\#A \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \left\lfloor \frac{M}{p_n} \right\rfloor \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{M}{p_n} < \frac{M}{2}.$$

Também é fácil ver que todo $m \in B$ pode ser escrito como $m = a \cdot b^2$ sendo a um produto de primos distintos, todos menores que p_N , e b^2 um produto de quadrados de primos, também menores que p_N . Existem exatamente 2^{N-1} números nas condições de a . Temos ainda que $b^2 \leq m \leq M$ e portanto $b \leq \sqrt{M} = 2^N$. Segue que existem, no máximo, 2^N números nas condições de b . Portanto $\#B \leq 2^{N-1} \cdot 2^N = 2^{2N-1} = M/2$. ■

4.10 Exercícios.

1 - Seja $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ uma seqüência crescente. Mostre que

- a) se $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então ela é constante a partir de um certo termo;
 b) se $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é estritamente crescente, então $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Conclua que $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ não é limitada superiormente.

2 - Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência. Mostre que

- a) se $|x_n| \rightarrow 0$, então $x_n \rightarrow 0$;
 b) se $x_n \rightarrow x$, então $|x_n| \rightarrow |x|$;

3 - Mostre que a recíproca do Exercício (2.b) é falsa.

4 - Sejam $y \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência convergente para $x \in \mathbb{R}$.

- a) Mostre que se $y < x$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y < x_n$ para todo $n \geq N$.
- b) Mostre que se $x < y$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y$ para todo $n \geq N$.
- c) Mostre que se $x_n \geq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \geq y$;
- d) Mostre que se $x_n \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \leq y$.
- e) Se $y < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então podemos afirmar que $y < x$?

5 - Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências convergentes para x e y , respectivamente. Suponhamos que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

a) $x \leq y$;

b) (**Teorema do Sanduíche**) se $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $x_n \leq z_n \leq y_n$ e se $x = y$, então $z_n \rightarrow x$.

6 - Sejam $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}, (m_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estritamente crescentes e tais que $\{n_k ; k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k ; k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Mostre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x se, e somente se, as subsequências $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergem para x .

7 - Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes para x e y , respectivamente. Mostre que

- a) $x_n - y_n \rightarrow x - y$;
- b) se $y \neq 0$, então $x_n/y_n \rightarrow x/y$;
- c) $x_n^m \rightarrow x^m$ qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$.

8 - Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada superiormente e que não tem valor de aderência. Mostre que $x_n \rightarrow -\infty$.

9 - Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a seqüência definida indutivamente por $x_1 = 0$ e

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que

- a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente;
- b) $x_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- c) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Determine $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

10 - O objetivo deste exercício é mostrar o seguinte resultado: para todo $m \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ com $m \geq 2$ e $a \geq 0$, existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 0$ e $x^m = a$. Tal x é dito **raiz m -ésima** de a e é denotado $\sqrt[m]{a}$ (ou simplesmente \sqrt{a} no caso $m = 2$). Para isto considere a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida indutivamente por $x_1 = 1$ e

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - a}{m x_n^{m-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que

a) a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^m$ é estritamente crescente em $[0, +\infty)$. Conclua a unicidade da raiz m -ésima de a ;

$$\text{b) } y^m \geq x^m + mx^{m-1}(y-x) \quad \forall x, y \geq 0;$$

$$\text{c) } x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\text{d) } x_{n+1}^m \geq a \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\text{e) } x_{n+2} \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\text{f) } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge e o seu limite } x \text{ verifica } x \geq 0 \text{ e } x^m = a.$$

Sugestão: Em (10.b) use (10.a) e considere separadamente os casos $x < y$, $x > y$ e $x = y$. Use ainda a seguinte igualdade:

$$\frac{y^m - x^m}{y - x} = y^{m-1} + y^{m-2}x + \cdots + yx^{m-2} + x^{m-1}.$$

Em (10.c) proceda por indução. Em (10.d) use (10.b) e em (10.e) use (10.d). Finalmente use a Proposição 4.15 em (10.f).

11 - Determine se é convergente ou divergente cada uma das séries abaixo.

$$\text{a) } \sum \frac{n}{2^n}; \quad \text{b) } \sum \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

12 - Seja $\sum x_n$ uma série convergente de termos positivos. Mostre que

$$\text{a) } \sum (x_n^2) \text{ é convergente};$$

$$\text{b) se } \liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n > 0, \text{ então } \sum (x_n/y_n) \text{ é convergente.}$$

13 - Use o resultado do Exercício 2 do Capítulo 2 para mostrar que a série harmônica diverge.

14 - Mostre que se $\sum x_n$ é absolutamente convergente e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, então $\sum (x_n \cdot y_n)$ é absolutamente convergente.

15 - Mostre que $\sum (\sin n/n^2)$ é convergente. Você consegue generalizar este resultado para séries do tipo $\sum (f(n)/n^2)$, sob que hipótese sobre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

16 - Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas seqüências positivas tais que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Mostre que $\sum x_n$ converge se, e somente se, $\sum y_n$ converge.

17 - O objetivo deste exercício é mostrar o **Critério de Leibniz**¹ que diz: se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência decrescente de números positivos convergente para 0, então a série $\sum (-1)^{n+1} x_n$ é convergente. Considere a seqüência de somas parciais $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ da série $\sum (-1)^{n+1} x_n$. Mostre que

a) $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada;

b) $(S_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ são monótonas. Conclua que estas seqüências são convergentes para o mesmo limite s ;

c) $\sum (-1)^{n+1} x_n$ é convergente.

18 - Use o Critério de Leibniz para dar um exemplo de uma série que é convergente mas não é absolutamente convergente.

19 - Determine, segundo o valor do parâmetro $a > 0$, a natureza da série

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} a^n.$$

¹Gottfried Wilhelm von Leibniz: * 01/07/1646, Leipzig, Alemanha - † 14/11/1716, Hannover, Alemanha.

Capítulo 5

Topologia de \mathbb{R}

5.1 Introdução.

A seguinte frase é facilmente aceita pela nossa intuição: “se x é um número próximo de 2, então x^2 é um número próximo de 4”. Outra, “ x^2 estará cada vez mais próximo de 4 quanto mais próximo x estiver de 2”. Por esta razão dizemos que a função $f(x) = x^2$ (para todo $x \in \mathbb{R}$) é **contínua** no ponto 2. Muitas das funções que encontramos na Análise são funções contínuas. Queremos precisar o conceito de continuidade. Observe que para isto é necessário estabelecer o que queremos dizer com “ x é um número próximo de 2”.

Inicialmente, observe que a noção de “estar próximo” usada cotidianamente é uma noção subjetiva. Por exemplo, suponhamos que um aluno de Engenharia de Produção da UFRJ, morador de Niterói, responda a um colega ao ser perguntado onde é o COPPEAD. Possivelmente ele responderá “É longe. Fica depois da reitoria”. Por outro lado, se o mesmo aluno viaja para Ribeirão Preto e lá o perguntarem em qual cidade ele mora, então, temendo que os ribeirenses não conheçam Niterói, ele resolve precisar sua resposta dizendo que “fica perto da cidade do Rio de Janeiro”. Certamente o aluno sabe que a distância entre o bloco F do CT e o COPPEAD é menor que os 14 km da ponte Presidente Costa e Silva (a popular Rio-Niterói) que separam as duas cidades.

Em Matemática, como em qualquer outra ciência, as idéias intuitivas e subjetivas são muito bem vindas para ajudar a tornar conceitos abstratos em objetos mais “palpáveis”. Tais idéias facilitam a compreensão e o desenvolvimento do conhecimento. Entretanto, em definições e demonstrações, devemos lidar apenas com conceitos e fatos rigorosos e objetivos. Idéias que dependam de interpretação do leitor, de acordo com sua opinião, não fazem parte de nenhuma teoria matemática. É claro que, mesmo em Matemática, opiniões e divergências de opiniões existem. Porém, uma demonstração (ou contra-exemplo) acaba com qualquer polêmica sobre a veracidade de uma afirmação.

Para evitar esta subjetividade no conceito de proximidade, podemos rephrasear o exemplo dizendo que “a medida que x se aproxima de 2, x^2 se aproxima de 4”, ou “se x tende a 2,

então x^2 tende a 4". O verbo *tender* nos faz pensar imediatamente no conceito de limite que já foi explorado no capítulo anterior. Resumindo: os conceitos de proximidade e limite estão intimamente relacionados.

A **Topologia** é o ramo da Matemática que trata destas questões de limite (e/ou proximidade). A Topologia da Reta, isto é, a Topologia de \mathbb{R} , é bem simples, para não dizer pobre. Nela, os abstratos conceitos da Topologia Geral ganham formas mais concretas e compreensíveis. Poderíamos usar estas formas simplificadas em nossa exposição porém, preferimos argumentos mais gerais para facilitar a (futura) passagem do leitor ao estudo da Topologia em contextos mais gerais. Mesmo que o leitor não venha a se especializar em Topologia, para se aprofundar em Análise ou Geometria serão necessários outros conhecimentos que ultrapassam os da Topologia da Reta.

5.2 Pontos interiores e conjuntos abertos.

Intuitivamente, x é um ponto no interior de um conjunto A se os pontos *vizinhos* a x (tanto à esquerda quanto à direita) também estão em A . Mais precisamente temos:

DEFINIÇÃO 5.1. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é **ponto interior** de $A \subset \mathbb{R}$ (ou que A é **vizinhança** de x) se A contém um intervalo aberto do qual x é elemento. Neste caso, escrevemos $x \in A^\circ$, ou seja, A° é o conjunto dos pontos interiores de A que, por isto, é denominado **interior** de A .

OBSERVAÇÃO 5.2. É fácil ver que na definição anterior podemos substituir, sem perda de generalidade, o intervalo aberto arbitrário por um intervalo da forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$. Ou, em outros termos, $x \in A^\circ$ se, e somente se,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } |y - x| < \varepsilon \implies y \in A.$$

Temos sempre $A^\circ \subset A$. Porém a inclusão inversa não é necessariamente verdadeira. Tomemos, por exemplo, $A = [0, 1]$. Temos que $1 \notin A^\circ$ pois todo intervalo aberto que contém 1 tem elementos maiores que 1 e portanto não está contido em A .

É trivial que todo ponto de um intervalo aberto pertence ao interior do intervalo. Ou seja, se A é um intervalo aberto e não vazio, então $A^\circ = A$. De maneira geral temos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 5.3. Um conjunto A é **aberto** se todos os seus pontos são interiores, ou seja, se $A \subset A^\circ$ (neste caso, $A^\circ = A$).

Como na Observação 5.2 temos que A é aberto se, e somente se,

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } |y - x| < \varepsilon \implies y \in A.$$

EXEMPLO 5.4. *O conjunto vazio é aberto! De fato, negar esta afirmação significa admitir que $\emptyset^\circ \subsetneq \emptyset$ e, em particular, admitir que existe $x \in \emptyset$.*

EXEMPLO 5.5. *O conjunto $[0, 1]$ não é aberto pois, como já vimos, $1 \notin [0, 1]^\circ$. Da mesma maneira, $0 \notin [0, 1]^\circ$. Por outro lado, qualquer $x \in (0, 1)$ é interior de $[0, 1]$ ou seja $[0, 1]^\circ = (0, 1)$.*

As propriedades mais importantes dos conjuntos abertos são dadas no teorema abaixo.

TEOREMA 5.6. *Temos:*

- i. os conjuntos \emptyset e \mathbb{R} são abertos;*
- ii. toda reunião de abertos é aberta;*
- iii. toda interseção finita de abertos é aberta.*

Demonstração. (i) Já foi provado.

(ii) Sejam $(A_i)_{i \in I}$ uma família de abertos e $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Se $x \in A$, então existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$. Como A_i é aberto, temos $x \in A_i^\circ$, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_i \subset A$. Segue que $x \in A^\circ$.

(iii) Basta mostrar que se A_1 e A_2 são dois conjuntos abertos então $A = A_1 \cap A_2$ também é aberto (o caso geral segue por indução). Se $A = \emptyset$, então não há nada mais a ser demonstrado. Suponhamos $A \neq \emptyset$ e seja $x \in A$. Temos que $x \in A_1$ e $x \in A_2$, logo, existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $(x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset A_i$ ($i = 1, 2$). Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ obtemos que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$, ou seja, $x \in A^\circ$. ■

5.3 Pontos de aderência e conjuntos fechados.

DEFINIÇÃO 5.7. *Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é ponto de aderência de $F \subset \mathbb{R}$ se existe uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ tal que $x_n \rightarrow x$. Neste caso, escrevemos $x \in \overline{F}$, ou seja, \overline{F} é o conjunto dos pontos de aderência de F e também é chamado de fecho de F .*

É fácil ver que x é ponto de aderência de F se, e somente se, qualquer intervalo aberto da forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$, tem pontos de F .

Temos sempre $F \subset \overline{F}$. Porém a inclusão inversa não é necessariamente verdadeira. Tomemos, por exemplo, $F = [0, 1)$. Temos $1 \in \overline{F}$ pois a seqüência $x_n = 1 - 1/n$ é convergente para 1 e além disto $x_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência convergente para x . Sabemos que se $x_n \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \geq a$. Do mesmo modo, se $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \leq b$. Conclui-se que uma seqüência convergente de pontos em um intervalo fechado tem o seu limite no intervalo. Ou seja, se F é um intervalo fechado e não vazio, então $\overline{F} = F$.

DEFINIÇÃO 5.8. Um conjunto F é **fechado** se todos os seus pontos de aderência pertencem a F , ou seja, se $\overline{F} \subset F$ (que neste caso implica $F = \overline{F}$).

EXEMPLO 5.9. O conjunto vazio é fechado! De fato, negar esta afirmação significa admitir que $\emptyset \subsetneq \overline{\emptyset}$ e, em particular, admitir que existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \emptyset$.

EXEMPLO 5.10. O conjunto $[0, 1)$ não é fechado pois, como já vimos, $1 \in \overline{[0, 1)}$. Da mesma maneira $0 \in \overline{(0, 1]}$. Por outro lado, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$ é convergente para x então $x \in [0, 1]$. Segue que $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$.

O conjunto vazio (e também \mathbb{R}) são exemplos de conjuntos que são abertos e fechados simultaneamente. Isto nos mostra, que ao contrário do que podem sugerir as palavras “aberto” e “fechado”, estes dois conceitos não são excludentes. Porém, existe uma relação estreita entre conjuntos abertos e conjuntos fechados.

PROPOSIÇÃO 5.11. Um conjunto é aberto se, e somente se, seu complementar é fechado.

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $F = A^c$.

Suponhamos que A seja aberto e mostremos que F é fechado. Para isto, devemos mostrar que $\overline{F} \subset F$. Se, por absurdo, existir uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ convergente para $x \notin F$ (i.e., $x \in A$), então, como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Desta maneira, para n suficientemente grande, temos que $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Isto é absurdo pois $x_n \in F = A^c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos agora que F seja fechado e mostremos que A é aberto. Se A não for aberto, então existirá $x \in A$ tal que $x \notin A^\circ$. Assim, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, o intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ não estará contido em A . Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\varepsilon = 1/n$ concluímos que existe $x_n \in (x - 1/n, x + 1/n)$ tal que $x_n \notin A$, ou seja, $x_n \in F$. Vemos facilmente que $x_n \rightarrow x$ e, portanto, $x \in \overline{F}$. Como F é fechado, temos $x \in F$, o que é absurdo pois $x \in A = F^c$. ■

OBSERVAÇÃO 5.12. Tomando complementares, o Teorema 5.6 nos diz que

- i. os conjuntos \emptyset e \mathbb{R} são fechados;
- ii. toda reunião finita de fechados é fechada;

iii. toda interseção de fechados é fechada.

Um conceito relacionado ao de ponto de aderência e de muita importância é dado na definição seguinte.

DEFINIÇÃO 5.13. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é **ponto de acumulação** de $F \subset \mathbb{R}$ se existe uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F \setminus \{x\}$ tal que $x_n \rightarrow x$, ou, em outros termos, se $x \in \overline{F \setminus \{x\}}$.

A idéia desta definição é que se x é ponto de acumulação de F então x pode ser “aproximado” por elementos de F , diferentes de x .

Segue imediatamente da definição que todo ponto de acumulação é também ponto de aderência. Porém, a recíproca não é verdadeira. Por isto, consideramos também a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 5.14. Se x é ponto de aderência de F e não é ponto de acumulação, então x é dito **ponto isolado** de F .

Tente entender o porquê desta nomenclatura.

5.4 Conjuntos compactos.

A próxima definição é apenas uma entre várias maneiras de se definir conjuntos compactos em \mathbb{R} . Estas várias definições dependendo do contexto (*i.e.*, do espaço topológico) podem não ser equivalentes (neste caso, a definição dada neste texto é a da chamada compacidade seqüencial). Porém, como já dissemos anteriormente, a topologia da reta é bastante simples e neste contexto tais definições são equivalentes.

Dependendo dos objetivos de cada um, pode-se usar uma ou outra forma de compacidade. A escolha pela definição seguinte é, de certa maneira, uma escolha pessoal do autor baseada em sua própria experiência em Matemática. É provável que outro autor, mais interessado em Geometria do que em Equações a Derivadas Parciais, prefira outra definição.

DEFINIÇÃO 5.15. Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é **compacto** se toda seqüência de pontos de K tem uma subseqüência convergente para um ponto de K .

Vejamos uma caracterização bem simples e de uso prático para conjuntos compactos.

TEOREMA 5.16. (Heine¹-Borel²) Um conjunto é compacto se, e somente se, ele é fechado e limitado.

¹Heinrich Eduard Heine: * 16/03/1821, Berlim, Alemanha - dagger 21/10/1881, Halle, Alemanha.

²Félix Edouard Justin Emile Borel: * 07/01/1871, Saint Affrique, França - † 03/02/1956, Paris, França.

Demonstração. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, toda seqüência num conjunto limitado tem subsequência convergente. Se além de limitado o conjunto é fechado, então o limite desta subsequência será um elemento do conjunto. Isto mostra que todo fechado e limitado é compacto.

Suponhamos agora que $K \subset \mathbb{R}$ seja compacto e mostremos que ele é limitado e fechado. Sejam $x \in \overline{K}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ convergente para x . Como qualquer subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende a x (Proposição 4.11), graças à compacidade, temos $x \in K$. Segue que K é fechado. Suponhamos, por absurdo, que K não seja limitado, digamos, superiormente. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $x_n > n$. Temos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ e $x_n \rightarrow +\infty$. Portanto, todas as suas subsequências tendem a $+\infty$ (veja a Observação 4.21) e, portanto, não são convergentes. Isto contradiz a compacidade de K . ■

A última demonstração (sobretudo a primeira parte) é digna de um livro de Topologia Geral. Em vários destes livros as demonstrações usam muito texto e poucos símbolos (algarismos, em particular). Na opinião do autor, além da importância incontestável da Topologia Geral, estes livros também são referências perfeitas para mostrar aos leigos em Matemática que, ao contrário do que eles pensam, nós não somos pessoas que trabalham fazendo contas com algarismos (números, como eles dizem)! :-)

Terminamos esta seção com outra caracterização de compactos. Mesmo não sendo útil neste curso, tal caracterização é importantíssima. Em Topologia Geral, esta caracterização é a definição de compacidade. Antes, definiremos cobertura aberta.

DEFINIÇÃO 5.17. Uma **cobertura aberta** para K é uma coleção \mathcal{C} de conjuntos abertos tais que

$$K \subset \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$$

TEOREMA 5.18. Um conjunto K é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta \mathcal{C} para K tem subcobertura finita, ou seja, existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finita que é cobertura para K .

Antes de demonstrar este teorema, em toda sua generalidade, mostraremos um caso particular.

TEOREMA 5.19. (Borel-Lebesgue¹) Se \mathcal{C} é um cobertura aberta para $[a, b]$, então ela tem subcobertura finita.

Demonstração. Procedemos por absurdo, supondo que \mathcal{C} não tenha subcobertura finita.

Dividindo o intervalo $[a, b]$ no seu ponto médio obtemos dois intervalos de comprimento $(b - a)/2$. Para pelo menos um destes intervalos, que denotaremos $[a_1, b_1]$, não existe subcobertura de \mathcal{C} finita. De fato, se existissem $\mathcal{C}', \mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$ finitas que fossem coberturas para o

¹Henri Léon Lebesgue: ★ 28/05/1875, Beauvais, France - † 26/07/1941, Paris, França.

primeiro e para o segundo intervalo, respectivamente, então $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$ seria uma subcobertura finita de \mathcal{C} para $[a, b]$. Aplicamos o procedimento anterior ao intervalo $[a_1, b_1]$. Continuando indefinidamente este processo construímos uma seqüência $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos encaixantes. Além disto, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = (a - b)/2^n$ e não existe subcobertura finita de \mathcal{C} para $[a_n, b_n]$.

Graças ao Teorema dos Intervalos Encaixantes, temos que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. Mais precisamente, esta interseção só tem um elemento x . De fato, suponhamos que exista $y \neq x$ tal que $y \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue $0 < |x - y| \leq b_n - a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é absurdo já que $b_n - a_n \rightarrow 0$.

Ora, $x \in [a, b]$, logo, existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Tomando $N \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, de modo que $b_N - a_N < \varepsilon$ temos $[a_N, b_N] \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Portanto, tomando $\mathcal{C}' = \{A\}$, temos que \mathcal{C}' é uma subcobertura finita de \mathcal{C} para $[a_N, b_N]$. Absurdo! ■

Demonstração. (Do Teorema 5.18) Suponhamos que K seja compacto (portanto limitado e fechado). Seja \mathcal{C} uma cobertura aberta de K . Como K é limitado podemos tomar $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $K \subset [a, b]$. Como K é fechado, o conjunto K° é aberto. Temos claramente que $\mathcal{C} \cup \{K^\circ\}$ é uma cobertura aberta de $[a, b]$. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finita tal que $K \subset [a, b] \subset \bigcup_{A \in \mathcal{C}'} A \cup \{K^\circ\}$. Daí, concluímos que $K \subset \bigcup_{A \in \mathcal{C}'} A$.

Suponhamos agora que toda cobertura aberta de K possua subcobertura finita. Para todo $x \in K$ definimos $A_x = (x - 1, x + 1)$. A coleção $\{A_x ; x \in K\}$ é uma cobertura aberta de K . Por hipótese, existem $x_1 < \dots < x_n \in K$ tais que $K \subset A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_n}$. Logo, $K \subset (x_1 - 1, x_n + 1)$ e, portanto, K é limitado.

Vamos mostrar que K° é aberto para concluir que K é fechado e, portanto, compacto (pois já sabemos que ele é limitado). Seja $y \in K^\circ$. Para todo $x \in K$ definimos

$$A_x = \left(x - \frac{|x - y|}{2}, x + \frac{|x - y|}{2} \right).$$

Temos que $(A_x)_{x \in K}$ é uma cobertura aberta de K tal que $y \notin A_x$ qualquer que seja $x \in K$. Por hipótese, existem $x_1, \dots, x_n \in K$ tais que $K \subset A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_n}$. Tomando

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{|x_1 - y|, \dots, |x_n - y|\},$$

é fácil ver que $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset K^\circ$. Mostramos que $y \in (K^\circ)^\circ$ e, portanto, K° é aberto. ■

5.5 Conjuntos densos.

DEFINIÇÃO 5.20. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ com $A \subset B$. Dizemos que A é **denso** em B se $B \subset \overline{A}$.

Em outros termos, se $A \subset B$, então A é denso em B se, e somente se, para todo $x \in B$, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$.

A próxima proposição nos fornece uma condição necessária e suficiente para a densidade.

PROPOSIÇÃO 5.21. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Temos que A é denso em B se, e somente se, todo intervalo aberto que contém algum ponto de B também contém algum ponto de A .*

Demonstração. Suponhamos que A seja denso em B . Sejam $x \in B$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ convergente para x . Se I um intervalo aberto contendo x , então para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande temos $x_n \in I$. Portanto $I \cap A \neq \emptyset$.

Por outro lado, suponhamos que todo aberto que intercepta B também intercepte A . Seja $x \in B$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, o intervalo aberto $(x - 1/n, x + 1/n)$ contém $x \in B$ e, portanto, contém algum ponto $x_n \in A$. Definimos desta maneira uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$. Segue que $x \in \overline{A}$. Logo, $B \subset \overline{A}$. ■

Vejamos um dos exemplos mais importantes de conjuntos densos em \mathbb{R} .

EXEMPLO 5.22. \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} . De fato, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostremos que $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Se $0 \in (a, b)$, então não há mais nada a ser demonstrado. Se $0 \notin (a, b)$, então $0 \leq a$ ou $b \leq 0$. Consideremos o caso $a \geq 0$ (o caso $b \leq 0$ é análogo). Como \mathbb{R} é arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/(b - a)$. Seja $m \in \mathbb{N}$ o menor natural tal que $m > na$, ou seja, $m \in \mathbb{N}$ satisfaz

$$\frac{m-1}{n} < a < \frac{m}{n}.$$

Para concluir que $m/n \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$ basta mostrar que $m/n < b$. Suponhamos, por absurdo, que $m/n > b$. Neste caso,

$$\frac{m-1}{n} < a < b < \frac{m}{n} \implies b - a < \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} \implies b - a < \frac{1}{n}.$$

Contradizendo $n > 1/(b - a)$.

5.6 Exercícios.

1 - Seja $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$. Determine:

- a) \overline{A} ; b) A° ; c) $\overline{A^c}$; d) $(A^c)^\circ$.

2 - Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e A a união de todos os subconjuntos abertos de X . Mostre que $A = X^\circ$.

3 - Mostre que X° é o maior subconjunto aberto de X , ou seja, mostre que

a) X° é aberto;

b) qualquer que seja o aberto A tal que $A \subset X$, temos $A \subset X^\circ$.

4 - Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Mostre que são equivalentes:

i. qualquer que seja o conjunto aberto A tal que $x \in A$, temos que $X \cap A \neq \emptyset$;

ii. qualquer que seja o intervalo aberto I tal que $x \in I$, temos $X \cap I \neq \emptyset$;

iii. para todo $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que $|x - y| < \varepsilon$;

iv. $x \in \overline{X}$.

5 - Seja $X \subset \mathbb{R}$. Mostre que $(X^\circ)^c = \overline{X^c}$.

6 - Seja $X \subset \mathbb{R}$. Mostre que \overline{X} é o menor fechado que contém X , ou seja, mostre que

a) \overline{X} é fechado;

b) qualquer que seja o fechado F tal que $X \subset F$, temos $\overline{X} \subset F$.

7 - Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e F a interseção de todos os fechados que contêm X . Mostre que $F = \overline{X}$.

8 - Mostre os itens (ii) e (iii) da Observação 5.12 a partir das definições de conjunto fechado e ponto de aderência.

9 - Dê um exemplo de família de abertos cuja interseção não é aberta. Dê um exemplo de família de fechados cuja união não é fechada.

10 - Seja A o conjunto dos números reais da forma $m/2^n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que A é denso em \mathbb{R} .

11 - Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é enumerável, então A^c é denso em \mathbb{R} . Conclua que \mathbb{Q}^c é denso em \mathbb{R} .

Capítulo 6

Limite e continuidade

6.1 Limite de funções.

Dada uma função real f estamos interessados em saber o que acontece com o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto x_0 sem, entretanto, assumir este valor. Este é o assunto desta seção. Muitas vezes $f(x)$ se aproximará de $f(x_0)$, porém, isto só ocorre para uma classe de funções, ditas **contínuas**. Trataremos desta questão posteriormente.

Iniciamos nossa discussão precisando o que quisemos dizer, no parágrafo anterior, com “ x se aproxima de um ponto x_0 sem, entretanto, assumir este valor”. Ora, se estamos interessados no valor de $f(x)$ é preciso que x esteja no domínio de f mas, como x não assume o valor x_0 , não é necessário que $f(x_0)$ esteja definido. Ou seja, não é necessário que x_0 pertença ao domínio de f . Porém, é preciso que seja possível “se aproximar de x_0 ” por pontos do domínio de f . Rigorosamente falando, se A é o domínio de f , então a noção de **limite** de funções terá sentido se, e somente, x_0 é ponto de acumulação de A . Lembramos que esta condição significa que $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$, i.e., existe uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ convergente para x_0 .

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de A . Como expressar de maneira rigorosa que $f(x)$ se aproxima de $l \in \mathbb{R}$ quando x se aproxima de x_0 ? A experiência com limite de seqüências nos indica que deve ser errado pensar que a distância de $f(x)$ a l decresce junto com a distância de x a x_0 . A armadilha explicada na Figura 4.1 também se apresenta neste contexto. Para armadilhas semelhantes usamos escapatórias semelhantes. A idéia intuitiva correta é dizer que $f(x)$ é tão próximo de l quanto quisermos, bastando para isto tomar x suficientemente próximo de x_0 . Vejamos a definição rigorosa.

DEFINIÇÃO 6.1. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de A . Dizemos que existe o **limite** de $f(x)$ quando x tende a $x_0 \in \mathbb{R}$ e ele vale $l \in \mathbb{R}$ se*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad x \in A, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Neste momento, o leitor já pode apreciar a capa do livro.

Comentário análogo ao que fizemos sobre a notação de limite de seqüências (em particular sobre o sinal de igual nela presente) e a unicidade do limite também se aplica aqui. Querendo, o leitor poderá demonstrar a unicidade do limite. Nós não a faremos aqui pois ela será uma consequência da Proposição 6.6.

Só faz sentido considerar o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 quando x_0 é ponto de acumulação do domínio de f . Daqui por diante, esta condição ficará subentendida quando estivermos considerando limites.

Atenção: a negação de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ diz que o limite, se existir, é diferente de l mas não diz que ele existe. Portanto, para negar esta condição, se não tivermos de antemão a existência do limite, então não podemos supor que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq l$. Neste caso, devemos tomar a negação lógica da condição que define que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. Isto será feito, por exemplo, na demonstração da Proposição 6.6.

EXEMPLO 6.2. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

É fácil ver que 0 é ponto de acumulação de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, obtemos a existência de $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < 1$ quando $0 < |x| < \delta$. Portanto,

$$2 = |1 - (-1)| = |f(\delta/2) - f(-\delta/2)| \leq |f(\delta/2) - l| + |f(-\delta/2) - l| < 1 + 1 = 2.$$

Absurdo!

EXEMPLO 6.3. Seja $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in (0, 1]$. Observe que 0 não está no domínio de f mas é ponto de acumulação deste. Logo, faz sentido perguntar se existe o limite de $f(x)$ quando x tende a 0 e, no caso afirmativo, determinar o valor do limite. Mostraremos que ele existe e vale 1. Seja $\varepsilon > 0$. Para todo $x \in (0, 1]$ temos $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Portanto, tomando qualquer $\delta > 0$, temos

$$x \in A, 0 < |x - 0| < \delta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

Concluimos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Da mesma maneira mostra-se que se $g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é constante igual a c e $x_0 \in A \setminus \{x_0\}$, então $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c$.

O exemplo anterior é atípico. Se x_0 , ε e δ são como na Definição 6.1, então, geralmente, δ depende de ε e de x_0 . Muitas vezes esta dependência é indicada na notação $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Os exemplos a seguir ilustram esta dependência. No primeiro deles δ depende apenas de ε e, no segundo, δ depende tanto de ε quanto de x_0 .

EXEMPLO 6.4. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostremos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$. Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, obtemos*

$$x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

QED¹.

EXEMPLO 6.5. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostremos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0^2$. Fixado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|x_0| + 1)\}$. Desta forma, se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|x| < |x_0| + \delta \leq |x_0| + 1$. Além disto,*

$$|f(x) - x_0^2| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \delta(|x| + |x_0|) < \delta(2|x_0| + 1) \leq \varepsilon.$$

O exemplo anterior pode induzir o leitor a pensar que achar δ em função de ε e de x_0 é uma tarefa sobrenatural. Normalmente, rascunha-se a demonstração de trás para frente: sabendo que devemos obter $|f(x) - l| < \varepsilon$, procuramos saber quão grande pode ser $|x - x_0|$ (i.e., qual deve ser o valor de δ) para que cheguemos a esta conclusão. Em seguida, passamos a limpo a demonstração e, já sabendo qual é o valor de δ , simplesmente dizemos: “seja $\delta = \text{abracadabra}...$ ” Porém, dependendo da função, mesmo que achar o valor de δ não seja mágica, tal tarefa pode ser bastante fatídica. Uma alternativa é fazer uso das proposições a seguir. Elas facilitam as demonstrações de existência e os cálculos dos limites, sem necessidade de manipular ε 's e δ 's.

PROPOSIÇÃO 6.6. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$. Então, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$ para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ convergente para x_0 .*

Demonstração. Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e mostremos que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ e $x_n \rightarrow x_0$, então $f(x_n) \rightarrow l$. Seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon. \quad (6.1)$$

Ora, $x_n \rightarrow x_0$, logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x_0| < \delta$. Assim, para $n \geq N$, ao tomar $x = x_n$ em (6.1) obtemos $|f(x_n) - l| < \varepsilon$. Concluimos que $f(x_n) \rightarrow l$.

Reciprocamente, suponhamos que seja falso que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0, \exists x \in A \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ e } |f(x) - l| \geq \varepsilon. \quad (6.2)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, ao tomar $\delta = 1/n$ em (6.2) obtemos $x_n \in A$ tal que

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - l| \geq \varepsilon.$$

¹QED, abreviação de “quod erat demonstrandum” que, em latim, significa “como queríamos demonstrar”.

Constrói-se desta maneira uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ convergente para x_0 sem que $f(x_n) \rightarrow l$. Absurdo! ■

Vejam como esta proposição facilita o cálculo de limites. Retomemos o Exemplo 6.5, mostrando o mesmo resultado sem manipular ε 's e δ 's.

EXEMPLO 6.7. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$ convergente para a . Temos então que $f(x_n) = x_n^2 \rightarrow a^2$. Como a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é arbitrária, concluímos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2$.*

Aplicando as proposições 6.6 e 4.22 bem como o resultado do Exercício 7 da Seção 4.10 demonstra-se facilmente a próxima proposição.

PROPOSIÇÃO 6.8. *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$, então*

- i. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$;
- ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = cl$;
- iii. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = l - m$;
- iv. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = lm$;
- v. se $m \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = l/m$.

Demonstração. Deixamos para o leitor. ■

Terminamos esta seção com uma propriedade útil sobre limites.

PROPOSIÇÃO 6.9. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l < m$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < m$ para todo $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$. Uma conclusão análoga vale quando $l > m$.*

Demonstração. Tomando $\varepsilon = m - l > 0$ na definição de limite, obtemos $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < m - l$ se $x \in A$ e $0 < |x - a| < \delta$. Ora

$$f(x) - l \leq |f(x) - l| < m - l \implies f(x) < m.$$

■

6.2 Os quinze tipos de limite.

Já vimos um tipo de limite (a saber, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$). Nesta seção, veremos os outros quatorze. Todos eles estão presentes na Tabela 6.1 (onde x_0 e l denotam números reais e f é uma função real de domínio $A \subset \mathbb{R}$).

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Tabela 6.1: Os quinze tipos de limite.

O limite que aparece na primeira linha e primeira coluna já foi definido. Os outros são definidos com pequenas adaptações. O importante é entender o que significam limites iguais a l , $+\infty$ ou $-\infty$ (cada um destes corresponde a um coluna da tabela), bem como o que representam os símbolos $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ (que correspondem às linhas). Façamos alguns comentários a este respeito.

$\lim f(x) = l$ Como já vimos, isto significa que, por menor que seja $\varepsilon > 0$, podemos concluir que $|f(x) - l| < \varepsilon$ desde que x que verifique certa condição.

$\lim f(x) = +\infty$ Significa que, por maior que seja $M > 0$, podemos concluir que $f(x) > M$ desde que x que verifique certa condição.

$\lim f(x) = -\infty$ Significa que, por maior que seja $M > 0$, podemos concluir que $f(x) < -M$ desde que x que verifique certa condição.

$x \rightarrow x_0$ Como já vimos, isto significa que a condição sobre x é $0 < |x - x_0| < \delta$ para δ suficientemente pequeno. É necessário que $x_0 \in A \setminus \{x_0\}$.

$x \rightarrow x_0^+$	Lê-se x tende a x_0 pela direita. Significa que a condição sobre x é $0 < x - x_0 < \delta$ para δ suficientemente pequeno. É necessário que $x_0 \in \overline{A \cap (x_0, +\infty)}$.
$x \rightarrow x_0^-$	Lê-se x tende a x_0 pela esquerda. Significa que a condição sobre x é $0 < x_0 - x < \delta$ para δ suficientemente pequeno. É necessário que $x_0 \in \overline{A \cap (-\infty, x_0)}$.
$x \rightarrow +\infty$	Lê-se x tende a mais infinito. Significa que a condição sobre x é $x > N$ para N suficientemente grande. É necessário que A seja ilimitado superiormente.
$x \rightarrow -\infty$	Lê-se x tende a menos infinito. Significa que a condição sobre x é $x < -N$ para N suficientemente grande. É necessário que A seja ilimitado inferiormente.

Por exemplo, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ deixa subentendido que $x_0 \in \overline{A \cap (-\infty, x_0)}$ e significa:

$$\forall M > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad x \in A, \quad 0 < x_0 - x < \delta \implies f(x) > M.$$

Para cada um dos quinze tipos de limite existem versões das proposições 6.6 e 6.9. A Proposição 6.8 tem uma versão quase idêntica para limites da primeira coluna da Tabela 6.1. Entretanto, para os outros tipos devemos tomar cuidado pois $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais, e por isto, não podem ser operados como se fossem: $(+\infty) + (+\infty) = 2 \cdot (+\infty)$, ou ainda, $(+\infty) + (-\infty) = 0$. Isto não faz sentido! Uma comparação entre as proposições 4.22 e 4.24 pode ajudar ao leitor a entender estas diferenças.

6.3 Funções contínuas.

Como já antecipamos, intuitivamente, uma função f é contínua em um ponto x_0 do seu domínio se $f(x)$ está próximo de $f(x_0)$ quando x está próximo de x_0 . Induzidos pela discussão que precedeu a definição de limite de funções, somos tentados a dizer que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em x_0 quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (6.3)$$

É quase isto, mas não exatamente. O problema é um “detalhe técnico”. A definição de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ exige que x_0 seja ponto de acumulação de A . Por outro lado, para que $f(x_0)$ tenha sentido devemos ter $x_0 \in A$. Estas duas condições podem ser incompatíveis (veremos um exemplo a seguir). Entretanto, quando x_0 verificar ambas as condições a definição que faremos será equivalente a (6.3).

EXEMPLO 6.10. Seja $A = [0, 1) \cup \{2\}$. Temos que $2 \in A$ mas $2 \notin \overline{A \setminus \{2\}} = [0, 1]$. Dada $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2)$ tem sentido ao contrário de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Por outro lado, $1 \notin A$ e $1 \in \overline{A \setminus \{1\}} = [0, 1]$. Logo, não existe $f(1)$, porém, pode existir $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

DEFINIÇÃO 6.11. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Dizemos que f é **contínua em x_0** se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in A, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

*Dizemos ainda que f é **contínua** se f é contínua em todo ponto de A e escrevemos $f \in C(A)$. Mais precisamente, $f \in C(A)$ se*

$$\forall y \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in A, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (6.4)$$

Alguns autores costumam denotar por $C^0(A)$, em vez de $C(A)$, ao conjunto das funções contínuas em A .

Observe que a definição de continuidade tem (como esperávamos) uma relação muito grande com a definição de limite. Por esta razão, podemos facilmente adaptar os argumentos dos exemplos 6.3, 6.4 e 6.5 para mostrar que são contínuas as funções $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = c$, $g(x) = x$ e $h(x) = x^2$ para todo $x \in A$.

EXEMPLO 6.12. *Este exemplo pretende acabar com o mito, geralmente apresentado nos cursos de Cálculo I, que diz que funções contínuas são aquelas cujos gráficos são traçados sem tirar o lápis do papel. Considere a função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Faça um esboço do gráfico de g e convença-se que não é possível desenhá-lo sem tirar o lápis do papel. Ora, a função g é a mesma do parágrafo anterior (com $A = \mathbb{N}$) que, como já sabemos, é contínua! Você está duvidando? Vejamos com mais detalhes. Sejam $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $x \in \mathbb{N}$ e $|x - n| < 1/2$, então $x = n$ e, portanto, $|g(x) - g(n)| = 0 < \varepsilon$. Concluimos que g é contínua em n e, como n é arbitrário, que g é contínua!*

Observe que tomamos $\delta = 1/2$ independente de ε e de n . Mais que isto, nem a definição de g não foi necessária na demonstração. Moral da história: funções definidas em \mathbb{N} não apenas são contínuas como são “muito contínuas”!

Passemos imediatamente às proposições que nos poupam, em muitos casos, o trabalho com ε 's e δ 's. Todas elas têm demonstrações análogas àquelas encontradas na Seção 6.1. Por esta razão omitiremos suas provas.

PROPOSIÇÃO 6.13. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. A função f é contínua em x_0 se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$ para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ convergente para x_0 .*

A proposição anterior, essencialmente, nos diz que funções contínuas são aquelas que comutam com o símbolo de limite, ou seja, f é contínua se, e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right),$$

desde que a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ esteja contida no domínio de f e seja convergente para um ponto deste conjunto.

EXEMPLO 6.14. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário, tomando seqüências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^c$ convergentes para x_0 , obtemos que $f(x_n) \rightarrow 1$ e $f(y_n) \rightarrow 0$. Concluimos que f é descontínua em qualquer ponto.

PROPOSIÇÃO 6.15. Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Suponhamos que f e g são contínuas em $x_0 \in A$. Temos que cf , $f + g$, fg e $f - g$ são contínuas em x_0 . Se além disto, $g(x_0) \neq 0$, então, f/g é contínua em x_0 .

COROLÁRIO 6.16. Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e $c \in \mathbb{R}$, então cf , $f + g$, fg e $f - g$ são contínuas. Além disto, a função f/g está definida e é contínua nos pontos de A onde g não se anula.

PROPOSIÇÃO 6.17. Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow A$ tais que $f(A) \subset B$. Se f é contínua em x_0 e g é contínua em $y_0 = f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua em x_0 . Segue que se f e g são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ convergente para x_0 . Como f é contínua temos que $f(x_n) \rightarrow f(x_0) = y_0$, e como g é contínua em y_0 temos que $g(f(x_n)) \rightarrow g(y_0) = g(f(x_0))$. Segue que $g \circ f$ é contínua em x_0 . ■

PROPOSIÇÃO 6.18. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $x_0 \in A$. Se $f(x_0) < l \in \mathbb{R}$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < l$ para todo $x \in A$ tal que $|x - x_0| < \delta$. Temos uma conclusão análoga se $f(x_0) > l$.

6.4 O Teorema do Valor Intermediário.

TEOREMA 6.19. (Do Valor Intermediário) Se $f \in C([a, b])$ e $f(a) < l < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = l$. A mesma conclusão vale quando $f(a) > l > f(b)$.

Demonstração. Seja $S = \{x \in [a, b] ; f(x) \leq l\}$. É imediato que S é não vazio ($a \in S$) e limitado superiormente (b é cota superior de S). Sejam $c = \sup S$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que $x \rightarrow c$. Temos que $f(x_n) \leq l$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e como f é contínua em c temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(c).$$

Portanto, $f(c) \leq l$ e, logo, $c < b$.

Suponhamos que $f(c) < l$. Graças à Proposição 6.18 existe $\delta > 0$ tal que se $x \in [a, b]$ e $|x - c| < \delta$, então $f(x) < l$. Como $c < b$ podemos tomar $x \in [a, b]$ com $c < x < c + \delta$ para obter que $f(x) < l$. Isto implica que $x \in S$ e $x > c = \sup S$, o que é absurdo. ■

PROPOSIÇÃO 6.20. *Seja I um intervalo não degenerado e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que*

- i. $J = f(I)$ é um intervalo;
- ii. Se f é injetiva, então f é monótona;
- iii. Se f é injetiva, então função $f^{-1} : J \rightarrow I$ é contínua.

Demonstração. (i) Sejam $a = \inf J$ e $b = \sup J$. Vamos mostrar que $J^\circ = (a, b)$ de onde seguirá que J é um intervalo (valerá uma dentre as seguintes possibilidades: $J = (a, b)$, $J = [a, b)$, $J = (a, b]$ ou $J = [a, b]$).

É fácil perceber que se $y \leq a = \inf J$, então $y \notin J^\circ$. Da mesma forma, se $y \geq b = \sup J$, então $y \notin J^\circ$. Segue que $J^\circ \subset (a, b)$.

Seja $y \in (a, b)$. Por definição de ínfimo e supremo, existem $y_1, y_2 \in J$ tais que $a < y_1 < y < y_2 < b$. Como $J = f(I)$, existem $x_1, x_2 \in I$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Como $f(x_1) \neq f(x_2)$, obtemos que $x_1 \neq x_2$. Suponhamos, por simplicidade, que $x_1 < x_2$. Aplicando o Teorema do Valor Intermediário à função f no intervalo $[x_1, x_2]$ concluimos que existe $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x) = y$. Segue que $y \in J$. Mostramos assim que $(a, b) \subset J$. Como (a, b) é aberto, obtemos $(a, b) \subset J^\circ$.

(ii) Suponhamos, por absurdo, que f não seja monótona. Então existem $x_1 < x_2 < x_3 \in I$ tais que $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ ou $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Consideremos o primeiro caso (o segundo é análogo). Seja $l \in (f(x_1), f(x_2)) \cap (f(x_3), f(x_2))$. Graças ao Teorema do Valor Intermediário, existem $s \in (x_1, x_2)$ e $t \in (x_2, x_3)$ tais que $f(s) = f(t) = l$, contrariando a injetividade de f .

(iii) Já sabemos que f é monótona. Para fixar as idéias, suponhamos que f é crescente.

Seja $y \in J$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset J$ tal que $y_n \rightarrow y$. Vamos mostrar que $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$. Dado $\varepsilon > 0$, se $r, t \in I$ são tais que $f^{-1}(y) - \varepsilon < r < f^{-1}(y) < t < f^{-1}(y) + \varepsilon$, então $f(r) < y < f(t)$. Como $y_n \rightarrow y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(r) < y_n < f(t)$ se $n \geq n_0$. Neste caso, $f^{-1}(y) - \varepsilon < r < f^{-1}(y_n) < t < f^{-1}(y) + \varepsilon$. Portanto $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| < \varepsilon$ se $n \geq n_0$. ■

6.5 Funções contínuas definidas em compactos.

O próximo teorema é um exemplo de como a compacidade pode ser bem explorada. A sua demonstração é bastante simples, porém, as idéias nela presentes são usuais (e poderosas)

no Cálculo de Variações e em Equações Diferenciais Parciais. Antes de enunciá-lo façamos algumas definições.

DEFINIÇÃO 6.21. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $B \subset A$. Se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in B$, então dizemos que x_0 é um **ponto de máximo** de f em B . Neste caso, $f(x_0)$ é o **valor máximo** de f em B . Se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in B$, então x_0 é dito **ponto de mínimo** de f em B e $f(x_0)$ é o **valor mínimo** de f em B . Se x_0 é ponto de máximo ou de mínimo em B , então x_0 é chamado de **extremo** em B . Em particular, quando $B = A$ trata-se de **máximo global** ou **mínimo global** ou **extremo global** de f .*

TEOREMA 6.22. (Weierstrass) *Se K é compacto e $f \in C(K)$, então f tem pontos de máximo e de mínimo em K .*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que f é limitada superiormente em K . Suponhamos, por absurdo que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $f(x_n) > n$. Claramente, temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$. Como K é compacto, a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para algum $x \in K$ (por abuso de notação, tal subsequência também será denotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, isto não deve atrapalhar o entendimento do leitor). Como f é contínua concluímos que $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$. Absurdo.

Mostremos agora que existe ponto de máximo em K . Sendo f limitada superiormente em K , existe $M = \sup \{f(x) ; x \in K\}$. Tomemos uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$. Como anteriormente, podemos extrair uma subsequência, ainda denotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergente para $x_0 \in K$. Da continuidade de f concluímos que $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$. Segue que x_0 é um máximo de f em K .

A demonstração da existência de um ponto de mínimo de f em K é análoga. ■

DEFINIÇÃO 6.23. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é **uniformemente contínua** se*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad x, y \in A, \quad |x - y| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Observe bem a diferença entre as definições de continuidade (veja (6.4)) e continuidade uniforme. Apenas trocamos a expressão " $y \in A$ " de lugar. Isto é realmente uma grande diferença. A definição de continuidade diz que, dado $\varepsilon > 0$ e $y \in A$, existe $\delta > 0$, dependente de ε e de y tal que se $x \in A$ e $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. A definição de continuidade uniforme nos diz mais que isto: é possível encontrar δ , independente de y . Vejamos um exemplo de função contínua que não é uniformemente contínua.

EXEMPLO 6.24. *Já vimos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é contínua. Mostremos que ela não é uniformemente contínua. Tomemos $\varepsilon = 1$. Para todo $\delta > 0$, tomando $x = 1/\delta - \delta/4$ e $y = x + \delta/2$, temos que $|x - y| < \delta$ porém*

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \delta|x - \delta/4| = 1 = \varepsilon.$$

Isto mostra que f não é uniformemente contínua.

TEOREMA 6.25. *Se K é compacto e $f \in C(K)$, então f é uniformemente contínua em K .*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que f não é uniformemente contínua. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0, \quad \exists x, y \in K \quad \text{tais que} \quad |x - y| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\delta = 1/n$ construímos duas seqüências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ tais que $|x_n - y_n| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos extrair uma subseqüência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ainda denotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$) convergente para $x \in K$. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$, obtemos que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também converge para x . Como f é contínua, temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = f(x)$. Concluimos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$, contrariando $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

6.6 ★ Pontos fixos para funções contínuas.

Façamos a seguinte definição para, em seguida, explicar sua importância.

DEFINIÇÃO 6.26. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que x é ponto fixo de f se $f(x) = x$.*

O leitor já deve ter percebido que em Matemática é importante resolver equações, ou pelo menos, mostrar a existência de soluções. Por exemplo, o Exercício 10 do Capítulo 4 tratava de mostrar que a equação (em x)

$$x^m = a \tag{6.5}$$

tem única solução positiva se $m \in \mathbb{N}$ e $a \geq 0$. De fato, o que se demonstra é que a função $F : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$F(x) = x - \frac{x^m - a}{mx^{m-1}}$$

tem ponto fixo e que este é a solução procurada para a equação (6.5). Como neste exemplo, freqüentemente é conveniente transformar um problema de resolver uma equação num problema de encontrar um ponto fixo para alguma função. Por esta razão, teoremas sobre existência ou unicidade de pontos fixos podem ser interessantes.

O próximo teorema é uma consequência simples do Teorema do Valor Intermediário. Ele se generaliza para dimensões maiores e, de fato, são estas generalizações que têm importância. Mas não custa nada demonstrá-lo aqui.

TEOREMA 6.27. (Do Ponto Fixo de Brouwer¹) *Se $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é contínua, então f tem ponto fixo.*

¹Luitzen Egbertus Jan Brouwer: ★ 27/02/1881, Rotterdam, Holanda - † 02/12/1966, Blaricum, Holanda.

Demonstração. Seja $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $g(x) = f(x) - x$ para todo $x \in [0, 1]$. Observamos que x é ponto fixo de f se, e somente se, x é raiz de g . Vamos então mostrar que g tem raiz.

Ora, $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ e $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Se $g(0) = 0$ ou $g(1) = 0$, então não há nada mais a ser demonstrado. Suponhamos agora que $g(0) > 0$ e $g(1) < 0$. Neste caso, como g é contínua, o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de uma raiz de g no intervalo $(0, 1)$. ■

Vejam os outros teoremas de ponto fixo que são úteis mesmo nesta sua versão mais simples. Como preliminar, definimos contração.

DEFINIÇÃO 6.28. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma **contração** se existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y| \quad \forall x, y \in A.$$

É fácil ver que se f é uma contração, então f é uniformemente contínua (veja Exercício 6).

TEOREMA 6.29. (Do Ponto Fixo de Banach¹) Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contração e $X \subset A$ fechado, não vazio e tal que $f(X) \subset X$. Então existe um único $a \in X$ que é ponto fixo de f . Mais precisamente, dado $x_0 \in X$ a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.6)$$

converge para a .

Demonstração. Vamos mostrar que a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Seja $\varepsilon > 0$.

Por definição de contração, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y| \quad \forall x, y \in A.$$

Como $\alpha \in (0, 1)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies \frac{|x_1 - x_0|\alpha^n}{1 - \alpha} < \varepsilon.$$

Por indução, mostra-se facilmente que $|x_{n+1} - x_n| \leq \alpha^n|x_1 - x_0|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando este fato, obtemos que se $m > n \geq N$, então

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= \left| \sum_{i=n}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \right| \leq \sum_{i=n}^{m-1} |x_{i+1} - x_i| \leq \sum_{i=n}^{m-1} \alpha^i |x_1 - x_0| \\ &\leq |x_1 - x_0| \sum_{i=n}^{+\infty} \alpha^i = \frac{|x_1 - x_0|\alpha^n}{1 - \alpha} < \varepsilon. \end{aligned}$$

¹Stefan Banach: * 30/03/1892, Kraków, Polônia - † 31/08/1945, Lvov, Ucrânia.

Concluimos que a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e, portanto, convergente para algum $a \in \mathbb{R}$. Como X é fechado obtemos que $a \in X$. Tomando o limite quando $n \rightarrow +\infty$ em (6.6), da continuidade de f segue que $a = f(a)$, ou seja, que a é ponto fixo de f .

Mostremos agora a unicidade. Suponhamos por absurdo, que existe $b \in X$ ponto fixo de f diferente de a . Temos

$$|b - a| = |f(b) - f(a)| \leq \alpha |b - a| < |b - a|.$$

Absurdo. ■

O Teorema do Ponto fixo de Banach também é conhecido pelo nome de Método das Aproximações Sucessivas de Picard¹ ou Lema da Contração.

6.7 Exercícios.

1 - Para $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dê as definições rigorosas de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2 - (Teorema do Sanduíche) Sejam $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in A$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$, então $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

3 - Nos exercícios abaixo, $[x]$ denota a parte inteira de $x \in \mathbb{R}$ (veja a Definição 4.40). Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[1/x]$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x[1/x]$.

4 - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $Z = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) = 0\}$ é fechado. Conclua daí que, se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, então $C = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) = g(x)\}$ é um conjunto fechado.

5 - Mostre que se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $|f|$ é contínua. A recíproca é verdadeira? Ou seja, podemos afirmar que se $|f|$ é contínua, então f é contínua?

6 - Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **Lipschitz² contínua** se existe $K > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ para todo $x, y \in A$. Mostre que se f é Lipschitz contínua, então f é uniformemente contínua. Em particular, toda contração é uniformemente contínua.

7 - Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, onde $a_n > 0$ e n é ímpar. Mostre que

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$;

¹Charles Emile Picard: * 24/07/1856, Paris, França - † 11/12/1941, Paris, França.

²Rudolf Otto Sigismund Lipschitz: * 14/05/1832, Kaliningrado, Rússia - † 07/10/1903, Bonn, Alemanha.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$;

c) $p(x)$ tem raiz, isto é, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = 0$.

8 - Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, onde $n \in \mathbb{N}$ é par e $a_n > 0$. Mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ que é ponto de mínimo global de p . Mostre ainda que se $p(x_0) < 0$, então p tem pelo menos duas raízes.

9 - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e suponha que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existem e são finitos. Mostre que

a) f é limitada;

b) f é uniformemente contínua.

10 - Seja $f : [0, 1) \cup [2, 3] \rightarrow [0, 2]$ dada por $f(x) = x$ se $x \in [0, 1)$ ou $f(x) = x - 1$ se $x \in [2, 3]$. Mostre que f é uma bijeção contínua com inversa dada por $f^{-1}(y) = y$ se $y \in [0, 1)$ ou $f^{-1}(y) = y + 1$ se $y \in [1, 2]$. Conclua que f^{-1} é descontínua em 1.

11 - Determine o conjunto onde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em cada um dos casos abaixo:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, \\ 1/q & \text{se } x = p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z} \text{ positivos e primos entre si,} \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

12 - Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$. Considere a seguinte definição: f é contínua em A se f é contínua em todos os elementos de A .

a) Mostre que se f é contínua em A , então $f|_A$ é contínua.

b) Encontre um exemplo onde $f|_A$ é contínua mas f não é contínua em A .

13 - O objetivo deste exercício é mais ambicioso do que o do Exercício 10 do Capítulo 4. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^m$ para todo $x \geq 0$. Mostre que

a) f é contínua e injetiva;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

c) existe e é contínua a função $f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.

A função f^{-1} é chamada de **raiz m-ésima** e é denotada por $f^{-1}(y) = \sqrt[m]{y}$ para todo $y \in [0, +\infty)$ (ou, simplesmente, \sqrt{y} quando $m = 2$).

Capítulo 7

Derivada

7.1 Derivabilidade e derivada.

O autor gostaria muito de ver a discussão que segue nos livros de Cálculo I. Como não a encontrou, ele a fará aqui¹.

Partimos da seguinte observação. As **funções afins** (funções $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $g(x) = ax + b$, sendo a e b constantes, *i.e.*, funções cujos gráficos são retas) são mais simples de serem manipuladas do que outras funções (cujos gráficos são curvas). Por isto, pode ser útil saber se é possível (e em caso afirmativo, de que modo) aproximar uma função qualquer por outra que seja afim. Intuitivamente, dada a função f , queremos encontrar uma função afim g que mais se pareça com f . Vejamos um exemplo que foge um pouco do contexto mas que é suficientemente familiar para auxiliar nossa intuição.

Consideremos a Terra. Durante muitos milhares de anos, pensou-se que a superfície terrestre era plana. A razão é que o planeta era visto de muito perto. Só quando nos afastamos dele, vemos que na realidade a sua superfície é mais parecida com uma esfera do que com um plano. Diz-se que que Aristóteles² reparou isto vendo a sombra da Terra sobre a Lua durante um eclipse. De certa forma, Aristóteles precisou recorrer à imagem da Terra vista da Lua para poder perceber que a Terra não era plana. Ora, se a Terra parece (ou parecia) plana significa que existe um plano que se parece muito com a Terra, certo? Na verdade, sabemos que não é um plano, mas sim vários planos. Para um habitante de Tóquio, o plano que mais parece com a Terra não é o mesmo que para nós. Isto nos indica que esta noção de aproximação é local, isto é, dependendo do ponto onde nos colocamos percebemos de modo diferente o objeto simples (reta, plano, etc) que mais parece com o objeto original (curva, esfera, etc).

¹Agradeço ao colega Prof. Victor Giraldo pelas proveitosas discussões sobre o assunto e indico ao leitor interessado a referência [8].

Victor Giraldo: ✱ 05/01/1969, Rio de Janeiro, Brasil.

²Aristóteles: ✱ 384 A.C., Stagirus, Grécia - † 322 A.C., Chalcis, Grécia.

Voltando ao caso de uma função real. Dada a função f definida numa vizinhança de x_0 queremos determinar a função afim g , dada por $g(x) = ax + b$, que mais se pareça com f na vizinhança de x_0 (lembre-se que esta semelhança é local, *i.e.*, perto de x_0). Determinar g significa determinar as constantes a e b . Será mais conveniente, modificando a constante b , escrever a função g na forma $g(x) = a(x - x_0) + b$ (convença-se que toda função afim pode ser escrita desta forma).

Como proceder? A resposta depende, é claro, do que se entende por “aproximar uma função”. Devemos precisar o que significa g ser a função afim que mais se parece com f na vizinhança de um ponto. É natural de se exigir que a função g satisfaça as seguintes condições:

- i. $g(x_0) = f(x_0)$;
- ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$.

É fácil ver que a primeira condição é equivalente a $b = f(x_0)$. A condição (ii) significa que o erro $r(x) = f(x) - g(x)$ cometido ao aproximar f por g no ponto x fica tão pequeno quanto quisermos bastando para isto tomar x suficientemente próximo de x_0 . Substituindo g por sua expressão em (ii) obtemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - (a(x - x_0) + f(x_0))] = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + a(x - x_0)) = f(x_0).$$

Ou seja, (ii) é equivalente à continuidade de f em x_0 . Veja que este resultado (in)felizmente não implica nada sobre a constante a . Será que existe algum valor para a que dê a melhor aproximação?

Consideremos um exemplo que será esclarecedor. Veja a figura 7.1(a). Ela mostra duas aproximações afins para a função $f(x) = x^2$ em três vizinhanças de $x_0 = 1$, cada vez menores.

Observe que o gráfico da função f é mais parecido com o gráfico de $g_2(x) = 2(x - 1) + 1$, do que com o de $g_1(x) = (x - 1) + 1$. Fazendo um *zoom* (tomando valores menores de h), percebemos que quanto mais perto do ponto $(1, 1)$ olharmos, maior será a semelhança entre os gráficos de f e g_2 . Podemos ter uma idéia dos valores dos erros $r_2(x) = f(x) - g_2(x)$ e $r_1(x) = f(x) - g_1(x)$ olhando para o extremo direito de cada um dos intervalos, *i.e.*, tomando $x = 1 + h$. Percebemos que $r_1(1 + h)$ se aproxima de zero, mas comparado com h não é tão pequeno. De fato, $r_1(1 + h)/h$ tende a 1 quando $h \rightarrow 0$. Por outro lado, $r_2(1 + h)$ é pequeno mesmo quando comparado com h já que $r_2(1 + h)/h$ tende a zero quando $h \rightarrow 0$. É esta propriedade que formaliza o fato de g_2 ser a melhor aproximação afim de f numa vizinhança de 1. É ela também que nos indica qual deve ser o coeficiente angular da melhor aproximação. Fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 7.1. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dizemos que f é derivável em $x_0 \in A$ se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + a(x - x_0))}{x - x_0} = 0. \quad (7.1)$$

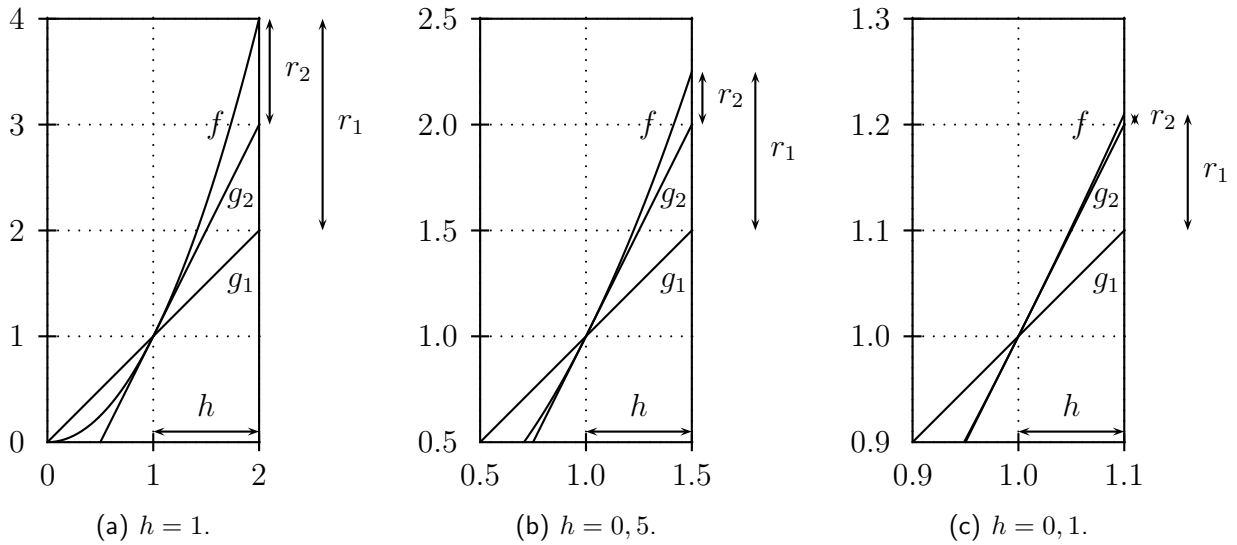


Figura 7.1: Aproximações afins para $f(x) = x^2$ no intervalo $[1 - h, 1 + h]$.

A discussão anterior mostra que se f é derivável em x_0 então f é contínua neste ponto.

O leitor que já estudou Cálculo I, pode estranhar esta definição, pois ela difere daquela clássica presente na maioria (senão todos) os livros. A proposição seguinte resolve esta confusão mostrando que as duas definições são equivalentes. A escolha pela Definição 7.1 se deve ao fato que ela pode ser facilmente generalizada para funções de mais variáveis (inclusive infinitas!). O autor espera, com isto, suavizar as dificuldades que o leitor possa ter com definição de derivabilidade para funções de duas ou mais variáveis. Reflita bastante sobre a Definição 7.1 e a proposição seguinte.

PROPOSIÇÃO 7.2. *Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in A$ se, e somente se, o limite abaixo existe e é finito.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Neste caso, a constante a em (7.1) é única e igual ao limite acima.

Demonstração. Observamos que

$$\frac{f(x) - (f(x_0) + a(x - x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + a(x - x_0))}{x - x_0} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a.$$

■

DEFINIÇÃO 7.3. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se f é derivável em $x_0 \in A$, então a **derivada** de f em x_0 é denotada por $f'(x_0)$ e definida por

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se f é derivável em todo ponto do seu domínio, então dizemos simplesmente que f é **derivável**. A função f' , definida no conjunto dos pontos onde f é derivável, que a cada x associa $f'(x)$ é chamada de **derivada** de f .

Se f é derivável em x_0 , então a reta de equação $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é a reta que melhor aproxima o gráfico de f numa vizinhança de x_0 . Tal reta é chamada de **tangente** ao gráfico de f no ponto x_0 .

EXEMPLO 7.4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ com a e b constantes. Perguntamos se f é derivável num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ e, no caso afirmativo, quanto vale $f'(x_0)$? Determinar se f é derivável em x_0 corresponde a determinar se f pode ser bem aproximada por uma função afim numa vizinhança de x_0 . Neste exemplo, f já é afim e portanto pode ser muito bem aproximada por ela mesma. Além disto, sendo a derivada igual ao coeficiente do termo em x da aproximação, temos imediatamente que $f'(x_0) = a$ qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Vamos verificar isto rigorosamente a partir da definição. Temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = a.$$

Segue que f é derivável em todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ com $f'(x_0) = a$. Em particular, se f é constante ($a = 0$), obtemos que $f'(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 7.5. Vamos verificar que a função dada por $f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) é derivável em qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ com $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$. Temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}.$$

Outros exemplos podem ser vistos em qualquer livro de Cálculo I. Vamos admitir conhecidas várias funções e suas derivadas. Em qualquer curso de Análise o enfoque não deve estar no cálculo de derivadas mas sim no estudo rigoroso de suas principais propriedades.

7.2 Propriedades operatórias.

As propriedades operatórias das derivadas são, em sua maioria, conseqüências imediatas das propriedades análogas sobre limites.

PROPOSIÇÃO 7.6. *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis em $x_0 \in A$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Temos:*

- i. $f + g$ é derivável em x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- ii. cf é derivável em x_0 e $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$;
- iii. $f - g$ é derivável em x_0 e $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;
- iv. fg é derivável em x_0 e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- v. se $g(x_0) \neq 0$, então f/g é derivável em x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Demonstração. (i) Basta notar que

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

e aplicar a Proposição 6.8 (i).

(ii) Segue de

$$\frac{(cf)(x) - (cf)(x_0)}{x - x_0} = c \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e da Proposição 6.8 (ii).

(iii) É consequência imediata dos itens (i) e (ii).

(iv) Obtemos este resultado da igualdade

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

e da Proposição 6.8 (iv).

(v) Um simples cálculo nos dá

$$\frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Daí e da Proposição 6.8, conclui-se o resultado. ■

PROPOSIÇÃO 7.7. (Regra da Cadeia) *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(A) \subset B$ (segue que $g \circ f$ está bem definida). Se f é derivável em $x_0 \in A$ e g é derivável em $f(x_0) \in B$, então $g \circ f$ é derivável em x_0 e, além disto,*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Demonstração. Seja $r : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$r(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} - g'(f(x_0)) & \text{se } y \neq f(x_0), \\ 0 & \text{se } y = f(x_0). \end{cases}$$

É imediato que $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} r(y) = 0 = r(f(x_0))$.

Se $y \in B$ e $y \neq f(x_0)$, então

$$g(y) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + r(y)(y - f(x_0)).$$

Como a equação acima é, trivialmente, verdadeira para $y = f(x_0)$ temos que ela é válida para todo $y \in B$. Fazendo $y = f(x)$ com $x \in A$, $x \neq x_0$, na equação acima e dividindo-a por $x - x_0$, obtemos

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + r(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como f é contínua em x_0 e r é contínua em $f(x_0)$, da Proposição 6.17 obtemos que $\lim_{x \rightarrow x_0} r(f(x)) = 0$. Concluímos a demonstração, fazendo $x \rightarrow x_0$ na equação acima e usando a Proposição 6.8. ■

PROPOSIÇÃO 7.8. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \rightarrow B$ invertível. Se f é derivável em $x_0 \in A$ com $f'(x_0) \neq 0$ e f^{-1} é contínua em $f(x_0)$, então f^{-1} é derivável em $f(x_0)$ e, além disto, $(f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}$.*

Demonstração. Seja $y_0 = f(x_0)$. Como f é derivável em x_0 temos que $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$ e, portanto, existe uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ convergente para x_0 . Como f é injetiva temos que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset B \setminus \{y_0\}$. Além disto, da continuidade de f segue que $f(x_n) \rightarrow y_0$ e, portanto, $y_0 \in \overline{B \setminus \{y_0\}}$.

Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B \setminus \{y_0\}$ convergente para y_0 . Vamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

O resultado seguirá da Proposição 6.6.

Definindo $x_n = f^{-1}(y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ e, como f^{-1} é contínua em y_0 , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x_0 . Segue que

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

■

EXEMPLO 7.9. No Exercício 13 do Capítulo 6 vimos que a função $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \geq 0$ tem inversa contínua. Como a derivada de f só se anula em 0, a Proposição 7.8 implica que f^{-1} é derivável em $f(x)$ se $x > 0$, ou seja, f^{-1} é derivável em $(0, +\infty)$. Além disto, em $y = f(x) > 0$, a derivada de f^{-1} é dada por

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

A hipótese de continuidade de f^{-1} é essencial como mostra o próximo exemplo.

EXEMPLO 7.10. Seja $f : [0, 1] \cup (2, 3] \rightarrow [0, 2]$ definida por $f(x) = x$ se $x \in [0, 1]$ e $f(x) = x - 1$, se $x \in (2, 3]$. Temos que f é derivável com $f'(x) = 1$ para todo x no domínio de f . Vimos no Exercício 10 do Capítulo 6 que f é uma bijeção com inversa descontínua em 1. Portanto, f^{-1} não é derivável em 1.

7.3 Extremos locais e o Teorema do Valor Médio.

Em paralelo ao conceito de extremo global existe o conceito de extremo local. Veremos a seguir como a derivada pode ser útil na determinação de extremos locais (e a posteriori de extremos globais). O resultado importante neste sentido é o Teorema dos Extremos Locais. Além de ser um resultado de uso bastante prático ele também tem importância teórica. Por exemplo, usaremos o Teorema dos Extremos Locais para demonstrar o Teorema do Valor Médio. Este último é um dos teoremas mais fundamentais da Análise Real.

DEFINIÇÃO 7.11. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $x_0 \in A$ é um **ponto de máximo local** de f se x_0 é ponto de máximo de f na interseção de A com uma vizinhança de x_0 . Mutatis mutandis define-se **ponto de mínimo local** e **ponto de extremo local** (veja a Definição 6.21).

É imediato que todo extremo global é extremo local.

TEOREMA 7.12. (Dos Extremos Locais) Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se $x_0 \in A$ é um extremo local de f tal que $x_0 \in A^\circ$ e f é derivável em x_0 , então $f'(x_0) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que x_0 é um ponto de máximo local de f (a demonstração é análoga para ponto de mínimo local). Como x_0 é ponto de máximo local no interior de A , existe $\delta > 0$ tal que se $|x - x_0| < \delta$, então $x \in A$ e $f(x) \leq f(x_0)$. Portanto para $x_0 < x < x_0 + \delta$ temos $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \leq 0$. Segue que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Por outro lado, para $x_0 - \delta < x < x_0$ temos $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \geq 0$. Portanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

■

Como dissemos anteriormente, o Teorema dos Extremos Locais é útil na determinação dos extremos globais de uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De fato, temos as seguintes implicações:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 \text{ é extremo global} \implies x_0 \text{ é extremo local} \\ x_0 \in A^\circ \text{ e } f \text{ é derivável em } x_0 \end{array} \right\} \implies f'(x_0) = 0.$$

Desta forma, se x_0 é extremo global, então x_0 pertence a algum dos três conjuntos abaixo:

$\{x \in A^\circ ; f \text{ é derivável em } x \text{ e } f'(x) = 0\}$, $A \setminus A^\circ$, ou $\{x \in A^\circ ; f \text{ não é derivável em } x\}$.

EXEMPLO 7.13. Seja $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x - 1|(5 - x)$ para todo $x \in [0, 4]$. Como f é contínua e $A = [0, 4]$ é compacto, f tem extremos globais. Vamos determiná-los. É imediato que

$$f(x) = \begin{cases} (1 - x)(5 - x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ (x - 1)(5 - x) & \text{se } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

Segue facilmente (verifique) que f é derivável em todo ponto $x \in A \setminus \{1\}$. Além disto,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 6 - 2x & \text{se } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

Assim, todo extremo global pertence a algum dos três conjuntos abaixo:

$$\{x \in A^\circ ; f \text{ é derivável em } x \text{ e } f'(x) = 0\} = \{3\},$$

$$A \setminus A^\circ = \{0, 4\},$$

$$\{x \in A^\circ ; f \text{ não é derivável em } x\} = \{1\}.$$

Uma simples verificação nos dá $f(0) = 5$, $f(1) = 0$, $f(3) = 4$ e $f(4) = 3$. Portanto, 0 é o ponto de máximo global e 1 é o ponto de mínimo global de f .

TEOREMA 7.14. (Do Valor Médio) Se $f \in C([a, b])$ (com $a < b$) é derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Demonstração. Considere a função g definida sobre o compacto $[a, b]$ dada por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Temos que $g \in C([a, b])$ e g é derivável em (a, b) com

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para terminar a demonstração basta mostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Observamos inicialmente que $g(a) = g(b) = 0$. Se g for constante, então não há mais nada a ser demonstrado. Suponhamos que g não seja constante.

Graças ao Teorema de Weierstrass, g tem extremos globais em $[a, b]$. Como g não é constante, um destes extremos, denotado c , é tal que $g(c) \neq g(a) = g(b)$ e portanto $c \in (a, b)$. Do Teorema dos Extremos Locais segue que $g'(c) = 0$. ■

Em particular temos o seguinte corolário.

COROLÁRIO 7.15. (Teorema de Rolle¹) Se $f \in C([a, b])$ (com $a < b$) é derivável em (a, b) com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração. Trivial. ■

COROLÁRIO 7.16. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, deriváveis em I° . Temos:

- i. se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I^\circ$, então f é crescente;
- ii. se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I^\circ$, então f é estritamente crescente;
- iii. se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I^\circ$, então f é decrescente;
- iv. se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I^\circ$, então f é estritamente decrescente;
- v. se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I^\circ$, então f é constante;
- vi. se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I^\circ$, então $f - g$ é constante.

Demonstração. (i) Sejam $a, b \in I$ com $a < b$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a $f|_{[a, b]}$, obtemos que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geq 0.$$

Segue que $f(b) \geq f(a)$. Portanto, f é crescente.

- (ii) Análogo ao item (i).
- (iii) Análogo ao item (i).

¹Michel Rolle: * 21/04/1652, Ambert, França - † 08/11/1719, Paris, França.

(iv) Análogo ao item (i).

(v) Segue dos itens (i) e (iii).

(vi) Basta aplicar o item (v) à função $f - g$. ■

Terminamos a seção com uma “generalização” do Teorema do Valor Médio.

TEOREMA 7.17. (De Cauchy) *Se $f, g \in C([a, b])$ (com $a < b$) são deriváveis em (a, b) e g' não se anula em (a, b) , então $g(a) \neq g(b)$ e existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. Observamos inicialmente que $g(a) \neq g(b)$, pois senão, pelo Teorema de Rolle, g' se anularia em algum ponto de (a, b) . Considere a função h , definida sobre $[a, b]$, dada por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

É fácil ver que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, logo existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, ou seja,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0.$$

Daí segue imediatamente o resultado. ■

Anteriormente anunciamos que o Teorema de Cauchy era uma “generalização” do Teorema do Valor Médio. Mas observe que na sua demonstração, usamos o Teorema de Rolle que aparecia como caso particular do Teorema do Valor Médio. Ou seja, mostramos as seguintes implicações:

Teorema do Valor Médio \Rightarrow Teorema de Rolle \Rightarrow Teorema de Cauchy \Rightarrow Teorema do Valor Médio.

portanto estes três resultados são equivalentes.

7.4 Derivadas de ordem superior e Fórmulas de Taylor.

A idéia que nos motivou a definição da derivada foi a de aproximar uma função arbitrária por uma função afim, isto é, por uma função polinomial de grau menor ou igual a 1. Veremos nesta seção, que podemos fazer aproximações melhores se tomarmos polinômios de graus maiores que 1. Para isto será necessário exigir mais de f .

DEFINIÇÃO 7.18. *Sejam I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável. Dizemos que f é **duas vezes derivável** em $x_0 \in I$ se f' é derivável em x_0 . A **segunda derivada** de f em x_0 é*

definida por $(f')'(x_0)$ e denotada por $f''(x_0)$. Se f' é derivável em I , então dizemos que f é **duas vezes derivável** e $f'' = (f')'$ é a **segunda derivada** de f . Analogamente, definimos a terceira derivada, quarta derivada, etc. De modo geral, a **n -ésima derivada** de f em x_0 é denotada por $f^{(n)}(x_0)$. Convencionamos ainda que $f^{(0)} = f$. Se f é n vezes derivável e $f^{(n)} \in C(I)$, então dizemos que f é de **classe C^n** em I , e escrevemos $f \in C^n(I)$. Finalmente, se $f \in C^n(I)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então dizemos que f é de **classe C^∞** em I e escrevemos $f \in C^\infty(I)$.

DEFINIÇÃO 7.19. Seja f uma função n vezes derivável em x_0 . Definimos o **polinômio de Taylor¹** de ordem n em torno de x_0 por

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Tomando $h = x - x_0$, o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de x_0 pode ser escrito como

$$p_n(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n.$$

Observe ainda que no ponto x_0 as derivadas até a ordem n de f e de p coincidem.

TEOREMA 7.20. (Fórmula de Taylor com resto de Peano²) Seja f uma função $n - 1$ vezes derivável no intervalo I (se $n = 1$ esta hipótese é eliminada), e n vezes derivável em $x_0 \in I$. Se $x_0 + h \in I$, então escrevendo

$$f(x_0 + h) = p_n(x_0 + h) + r(h),$$

sendo p_n o polinômio de Taylor de grau n de f em torno de x_0 , temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

Demonstração. Observamos inicialmente que a relação $f(x_0 + h) = p_n(x_0 + h) + r(h)$ deve ser vista como a definição de $r(h)$, i.e., $r(h) = f(x_0 + h) - p_n(x_0 + h)$.

Procedemos por indução em n . Para $n = 1$ temos $p_1(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$. Seque que

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h}.$$

O resultado segue imediatamente da Definição 7.1 e da Proposição 7.2.

¹Brook Taylor: * 18/08/1685, Edmonton, Inglaterra - † 29/12/1731, Londres, Inglaterra.

²Giuseppe Peano: * 27/08/1858, Piemonte, Itália - † 20/04/1932, Turim, Itália.

Suponhamos $n > 1$. Observamos que f' é $n - 2$ vezes derivável em I e $n - 1$ vezes derivável em x_0 . Um cálculo simples mostra que o polinômio de Taylor de grau $n - 1$ de f' em torno de x_0 é dado por p'_n . Daí e da hipótese de indução, obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - p'_n(x_0 + h)}{h^{n-1}} = 0.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Da igualdade acima, concluímos que existe $\delta > 0$ tal que

$$x_0 + h \in I, 0 < |h| < \delta \implies \left| \frac{f'(x_0 + h) - p'_n(x_0 + h)}{h^{n-1}} \right| < \varepsilon.$$

Seja $h \in (0, \delta)$ tal que $x_0 + h \in I$ (o caso $h \in (-\delta, 0)$ é análogo). As funções dadas por $r(t) = f(x_0 + t) - p_n(x_0 + t)$ e $g(t) = t^n$ são deriváveis em $[0, h]$ e se anulam em 0. Além disto, g' não se anula em $(0, h)$. Pelo Teorema de Cauchy (Teorema 7.17), obtemos que existe $t \in (0, h)$ tal que

$$\left| \frac{r(h)}{h^n} \right| = \left| \frac{r(h) - r(0)}{g(h) - g(0)} \right| = \left| \frac{r'(t)}{g'(t)} \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{f'(x_0 + t) - p'_n(x_0 + t)}{t^{n-1}} \right| < \frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon.$$

■

O teorema anterior diz que, numa vizinhança de x_0 , podemos aproximar uma função f pelo seu Polinômio de Taylor de grau n . Ao fazê-lo, no ponto $x_0 + h$, cometemos um erro $r(h) = f(x_0 + h) - p_n(x_0 + h)$ que é um **infinitésimo de ordem n** , i.e., que tende a zero mais rápido que h^n quando h tende a 0. Este fato é, muitas vezes expresso, com a seguinte frase: “ r é $o(h^n)$ quando $h \rightarrow 0$ ”. Ou ainda, é usado o abuso de notação “ $r = o(h^n)$ ”.

O teorema seguinte fornece uma forma mais explícita para o erro da aproximação. Ele também pode ser visto como uma generalização do Teorema do Valor Médio.

TEOREMA 7.21. (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange¹) Se $f \in C^n([a, b])$ (com $a < b$, o caso $b < a$ é análogo) e f é $n + 1$ vezes derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) = p_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

sendo p_n o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de a .

Demonstração. Seja g definida sobre $[a, b]$ dada por

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(b-x)^i + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}, \end{aligned}$$

¹Joseph-Louis Lagrange: * 25/01/1736, Turim, Itália - † 10/04/1813, Paris, França.

sendo A uma constante escolhida de modo que $g(a) = f(b)$ e, portanto,

$$f(b) = p_n(b) + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}.$$

Devemos mostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f^{(n+1)}(c) = A$. Temos que $g \in C([a, b])$ e é derivável em (a, b) . Além disto, $g(b) = f(b) = g(a)$. Graças ao Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Por outro lado,

$$g'(c) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i+1)}(c)}{i!}(b-c)^i - \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(c)}{(i-1)!}(b-c)^{i-1} - \frac{A}{n!}(b-c)^n = \frac{(f^{(n+1)}(c) - A)}{n!}(b-c)^n.$$

Segue que $f^{(n+1)}(c) = A$. ■

Tome $a = x_0$ e $b = x_0 + h$ no Teorema 7.21 para compará-lo com o Teorema 7.20.

Como exemplo de aplicação da Fórmula de Taylor temos a seguinte proposição sobre extremos locais.

PROPOSIÇÃO 7.22. *Seja f uma função definida num intervalo I e n vezes derivável em $x_0 \in I$ com $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Temos:*

- i. se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então x_0 é mínimo local de f .
- ii. se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é máximo local de f .
- iii. se n é ímpar, então x_0 não é extremo local de f .

Demonstração. Seja $x \in I$. Como as derivadas de f se anulam até a ordem $n-1$, tomando $h = x - x_0$ na Fórmula de Taylor com resto de Peano obtemos

$$f(x) - f(x_0) = p_n(x) - f(x_0) + r(h) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + r(h) \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0. \quad (7.2)$$

Deste modo, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in I$ com $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|r(h)| < \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \right|. \quad (7.3)$$

De (7.2) e (7.3), obtemos que o sinal de $f(x) - f(x_0)$ é o mesmo de

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Daí seguem imediatamente as três afirmações da proposição. ■

7.5 ★ O Método de Newton.

No Exercício 10 do Capítulo 4 mostramos que, dados $m \in \mathbb{N}$ e $a \geq 0$, existe $x \geq 0$ tal que $x^m = a$, ou de modo equivalente, que existe raiz para a função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^m - a$ para todo $x \geq 0$. Nosso método consistiu em definir recursivamente uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que era convergente para a raiz da função f acima.

O método empregado é um caso particular do chamado **Método de Newton**¹, muito usado para calcular aproximações (tão boa quanto quisermos) de raízes de funções. A Figura 7.2 dá uma idéia geométrica do método. O próximo teorema garante o seu funcionamento.

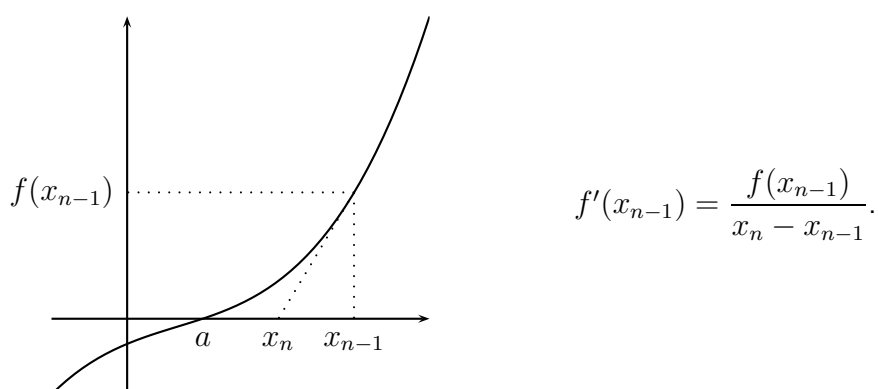


Figura 7.2: Iteração do Método de Newton.

TEOREMA 7.23. (Método de Newton) *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in A$ com $f(a) = 0$. Suponhamos que exista $\varepsilon > 0$ tal que*

- i. f é duas vezes diferenciável em $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e f'' é contínua em a ;*
- ii. f' não se anula em $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.*

Então, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $x_0 \in [a - \delta, a + \delta]$, a seqüência definida recursivamente por

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

é convergente para a .

Demonstração. Segue imediatamente das hipóteses que, no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, a função dada por

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

¹Sir Isaac Newton: ★ 04/05/1643, Woolsthorpe, Inglaterra - † 31/03/1727, Londres, Inglaterra.

está bem definida e é derivável. Derivando g obtemos,

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Segue que g' é contínua em a e que $g'(a) = 0$. Portanto, existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $|g'(x)| \leq 1/2$ para todo $x \in X = [a - \delta, a + \delta]$.

Vamos mostrar que $g|_X$ é uma contração. Sejam $x, y \in X$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (x, y) \subset X$ tal que

$$|g(x) - g(y)| = |g'(z)| \cdot |x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

Temos ainda que $g(X) \subset X$. De fato, se $x \in X$ então,

$$|g(x) - g(a)| \leq \frac{1}{2}|x - a| < |x - a| \leq \delta.$$

Como $g(a) = a$ temos $|g(x) - a| < \delta$ e, portanto, $g(x) \in X$. Em particular, se $x_0 \in X$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para o único ponto fixo de g em X . Ou seja, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a . ■

7.6 ★ Regras de L'Hospital.

PROPOSIÇÃO 7.24. (Regra de l'Hospital¹ "0/0") Sejam f e g funções deriváveis em (a, b) . Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$, g' não se anula em (a, b) e existe $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)/g'(x)$ (finito ou não), então existe $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)/g(x)$ e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. Como $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$, modificando ou estendendo f , se necessário, podemos supor que $f(a) = 0$. Analogamente, $g(a) = 0$. Desta forma f e g são contínuas em $[a, b)$.

Seja $x \in (a, b)$. Aplicando o Teorema 7.17 às funções f e g sobre o intervalo $[a, x]$, encontramos $y \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

O resultado segue da igualdade acima observando que $y \rightarrow a^+$ quando $x \rightarrow a^+$. ■

Pequenas adaptações na demonstração anterior mostram que a proposição também é válida quando no seu enunciado substituimos $x \rightarrow a^+$ por $x \rightarrow b^-$. Da mesma forma, a Regra de l'Hospital vale para limites do tipo $x \rightarrow a$. O próximo corolário trata do caso $x \rightarrow +\infty$ (o caso $x \rightarrow -\infty$ é análogo).

¹Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital: ★ 1661, Paris, França - † 02/02/1704, Paris, França.

COROLÁRIO 7.25. *Sejam f e g funções deriváveis em $(a, +\infty)$. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, g' não se anula em $(a, +\infty)$ e existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)/g'(x)$ (finito ou não), então existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x)$ e*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. Considere a função F definida sobre um intervalo $(0, b)$ por $F(y) = f(1/y)$. Analogamente definimos $G(y) = g(1/y)$. Os seguintes fatos são de verificação imediata:

- i. F e G são deriváveis com $F'(y) = -f'(1/y)/y^2$ e $G'(y) = -g'(1/y)/y^2$ (segue que G' não se anula);
- ii. $\lim_{y \rightarrow 0^+} F(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(1/y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;
- iii. $\lim_{y \rightarrow 0^+} G(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} g(1/y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$;
- iv. $\lim_{y \rightarrow 0^+} F'(y)/G'(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f'(1/y)/g'(1/y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)/g'(x)$.

Pela Proposição anterior, $\lim_{y \rightarrow 0^+} F(y)/G(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x)$. Então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)/g'(x).$$

■

PROPOSIÇÃO 7.26. (Regra de l'Hospital " ∞/∞ ") *Sejam f e g funções deriváveis em (a, b) . Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$, g' não se anula em (a, b) e existe $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)/g'(x)$ (finito ou não), então existe $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)/g(x)$ e*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)/g'(x)$ seja finito e igual a l (no caso infinito, a demonstração é análoga). Sabemos que existe $y > a$ tal que

$$z \in (a, y) \implies l - \varepsilon < \frac{f'(z)}{g'(z)} < l + \varepsilon. \quad (7.4)$$

Como $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$, existe $\delta > 0$ (que podemos supor menor que $y - a$) tal que

$$a < x < a + \delta \implies 1 - \varepsilon < \frac{1 - g(y)/g(x)}{1 - f(y)/f(x)} < 1 + \varepsilon. \quad (7.5)$$

Seja $x \in (a, a + \delta) \subset (a, y)$. Graças ao Teorema 7.17, existe $z \in (x, y) \subset (a, y)$ tal que

$$\frac{f(x)(1 - f(y)/f(x))}{g(x)(1 - g(y)/g(x))} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Daí segue que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \cdot \frac{1 - g(y)/g(x)}{1 - f(y)/f(x)}.$$

Daí e das relações (7.4) e (7.5) obtemos

$$(l - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{g(x)} < (l + \varepsilon)(1 + \varepsilon),$$

se $f'(z)/g'(z) \geq 0$ (caso contrário, basta inverter as desigualdades acima). A conclusão segue imediatamente. ■

Pequenas adaptações na demonstração anterior mostram que a proposição também é válida nos casos $x \rightarrow b^-$ e $x \rightarrow a$. O próximo corolário trata do caso $x \rightarrow +\infty$ (analogamente, trata-se o caso $x \rightarrow -\infty$). A demonstração é uma adaptação da idéia usada na demonstração do Corolário 7.25 que, por esta razão, é deixada a cargo do leitor.

COROLÁRIO 7.27. *Sejam f e g funções deriváveis em $(a, +\infty)$. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, g' não se anula em $(a, +\infty)$ e existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)/g'(x)$, então existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x)$ e*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. Deixada para o leitor. ■

7.7 Exercícios.

1 - Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A^\circ$ tais que f é derivável em x_0 e $f'(x_0) > 0$. Mostre que existem $a, b \in A$ tais que $f(a) < f(x_0) < f(b)$.

2 - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suponhamos que f seja derivável em $x_0 \in \mathbb{R}$. Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que seja contínua a função abaixo:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{se } x \neq x_0, \\ a & \text{se } x = x_0, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3 - Seja $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x$. Determine os conjuntos

$$A = \{x \in [-1, 2] ; x \text{ é mínimo global de } f\},$$

$$B = \{x \in [-1, 2] ; x \text{ é máximo global de } f\},$$

$$C = \{x \in [-1, 2] ; x \text{ é mínimo local de } f\},$$

$$D = \{x \in [-1, 2] ; x \text{ é máximo local de } f\}.$$

4 - O objetivo deste exercício é demonstrar a versão real do **Teorema Fundamental da Álgebra**: todo polinômio de grau n tem no máximo n raízes.

a) Mostre que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável e tem n raízes, então f' tem pelo menos $n - 1$ raízes.

b) Mostre a versão real do Teorema Fundamental da Álgebra.

Sugestão: Em (4.b) proceda por indução e use (4.a).

5 - Sejam $K > 0$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em I° , sendo I um intervalo. Mostre que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y \in I \quad \iff \quad |f'(x)| \leq K \quad \forall x \in I^\circ.$$

6 - Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Mostre que existe $K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

7 - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, com derivada limitada. Mostre que existe $c > 0$ tal que a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x + cf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma bijeção com inversa derivável.

8 - Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes derivável no ponto $x_0 \in A^\circ$. Mostre que

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

Dê um exemplo em que o limite acima existe mas f não é derivável em x_0 .

9 - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e tal que $f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Mostre que existe $x > 0$ tal que $f'(x) = 0$.

10 -

11 - Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $a \geq 0$. Escreva a definição da seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de aproximações dada pelo Método de Newton para a raiz da função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^m - a$ para todo $x \geq 0$ (compare com a seqüência do Exercício 10 do Capítulo 4).

12 - Mostre que para a convergência do Método de Newton (Teorema 7.23) a hipótese de continuidade de f'' em a pode ser substituída pela limitação de f'' em $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

13 - Seja p um polinômio não constante. Mostre que

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{|p(x)|} = +\infty$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{|p(x)|} = 0$.

Capítulo 8

Integral de Riemann

8.1 Somas superiores e inferiores.

O conceito de integral tem suas origens no **Método da Exaustão** devido, provavelmente, a Eudoxo e que teve Arquimedes¹ como um dos seus grandes desenvolvedores. A motivação deste método foi o cálculo de áreas e volumes de figuras com fronteiras curvas.

Apresentaremos aqui a integral de Riemann² usando a definição devida a Darboux³ [2]. Para o autor, a importância da integral de Riemann é, sobretudo, histórica. A integral de Lebesgue generaliza este conceito com muitas vantagens analíticas. Porém, a sua definição exige ferramenta muito mais complicado e abstrato. Portanto, a integral de Riemann também tem importância didática. Ela serve de aquecimento à intuição para o estudo posterior da integral de Lebesgue. O leitor interessado no assunto poderá consultar [17].

DEFINIÇÃO 8.1. Chamamos **partição** de $[a, b]$ qualquer $P \subset [a, b]$ finito tal que $a, b \in P$. O conjunto das partições de $[a, b]$ é denotado $\mathbb{P}[a, b]$.

A definição anterior não exclui a possibilidade $a = b$. Neste caso, a única partição do intervalo (degenerado) $\{a\}$ é $P = \{a\}$.

É imediato que se $P, Q \in \mathbb{P}[a, b]$, então $P \cup Q \in \mathbb{P}[a, b]$.

Se $P \in \mathbb{P}[a, b]$, então ao escrever $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, deixaremos sub-entendido que $a = x_0 \leq \dots \leq x_n = b$.

DEFINIÇÃO 8.2. Seja f uma função limitada em $[a, b]$ e $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tomemos

$$m_i = \inf\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad e \quad M_i = \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

¹Arquimedes: * 287 A.C., Siracusa, Itália - † 212 A.C., Siracusa, Itália.

²Georg Friedrich Bernhard Riemann: * 17/09/1826, Breselenz, Alemanha - † 20/07/1866, Selasca, Itália.

³Jean Gaston Darboux: * 14/08/1842, Nimes, França - † 23/02/1917, Paris, França.

Definimos a **soma inferior** e a **soma superior** de f com relação a P , respectivamente, por

$$I(f; P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{e} \quad S(f; P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

A interpretação geométrica de $I(f; P)$ e $S(f; P)$ para uma função f contínua e positiva é dada na Figura 8.1. A área pintada de cinza (riscada ou não) corresponde a $S(f; P)$ enquanto que a área riscada \otimes corresponde a $I(f; P)$. Vemos então que $S(f; P)$ e $I(f; P)$ são aproximações por excesso e por falta, respectivamente, para a área¹ da região delimitada pelo gráfico de f , o eixo x , a reta $x = a$ e a reta $x = b$. Observamos ainda que a área riscada está contida na área cinza, refletindo o fato que $I(f; P) \leq S(f; P)$.

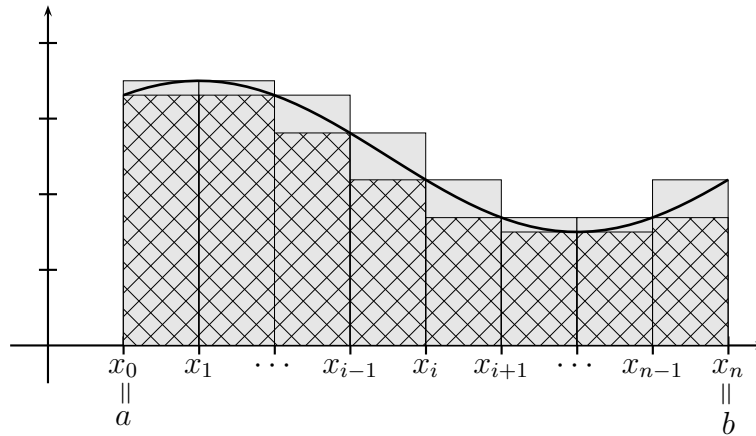


Figura 8.1: Interpretação geométrica soma superior e inferior para uma função contínua e positiva.

EXEMPLO 8.3. Se a é um elemento do domínio de f , então f é limitada em $\{a\}$ e $I(f; \{a\}) = S(f; \{a\}) = 0$.

EXEMPLO 8.4. Consideremos uma função f constante, igual a c , em um intervalo $[a, b]$. Seja $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Temos

$$m_i = \inf\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} = c.$$

Portanto,

$$I(f; P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

Analogamente obtemos $S(f; P) = c(b - a)$.

¹O que é área de uma região delimitada por linhas tortas?

É fácil ver que $I(f; P) \leq S(f; P)$. A proposição a seguir é uma generalização deste resultado.

PROPOSIÇÃO 8.5. *Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Temos:*

$$I(f; P) \leq I(f; P \cup Q) \leq S(f; P \cup Q) \leq S(f; Q) \quad \forall P, Q \in \mathbb{P}[a, b].$$

Demonstração. Sejam $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ e $Q = \{y_0, \dots, y_m\}$, partições de $[a, b]$, e $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $y_1 \in [x_{j-1}, x_j]$.

Escrevemos

$$\begin{aligned} I(f; P) &= \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(x_j - y_1) + m_j(y_1 - x_{j-1}). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Tomando $p = \inf\{f(x) ; x \in [y_1, x_j]\}$ e $q = \inf\{f(x) ; x \in [x_{j-1}, y_1]\}$, temos

$$I(f; P \cup \{y_1\}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i(x_i - x_{i-1}) + p(x_j - y_1) + q(y_1 - x_{j-1}). \quad (8.2)$$

Ora, $[x_{j-1}, y_1] \cup [y_1, x_j] = [x_{j-1}, x_j]$, logo, $m_j \leq p$ e $m_j \leq q$. De (8.1) e de (8.2), obtemos

$$I(f; P) \leq I(f; P \cup \{y_1\}). \quad (8.3)$$

Analogamente, mostra-se que

$$S(f; Q \cup \{x_1\}) \leq S(f; Q). \quad (8.4)$$

Usando (8.3), $m - 1$ vezes, e (8.4), $n - 1$ vezes, concluímos que

$$\begin{aligned} I(f; P) &\leq I(f; P \cup \{y_1\}) \leq \dots \leq I(f; P \cup \{y_1, \dots, y_{m-1}\}) = I(f; P \cup Q) \\ &\leq S(f; P \cup Q) = S(f; Q \cup \{x_1, \dots, x_{n-1}\}) \leq \dots \leq S(f; Q \cup \{x_1\}) \leq S(f; Q). \end{aligned}$$

■

COROLÁRIO 8.6. *Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Então $\{I(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\}$ é limitado superiormente e $\{S(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\}$ é limitado inferiormente. Além disto,*

$$\sup \{I(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\} \leq \inf \{S(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\}.$$

Demonstração. Graças à proposição anterior temos

$$I(f; P) \leq S(f; Q) \quad \forall P, Q \in \mathbb{P}[a, b].$$

Ou seja, $I(f; P)$ é cota inferior para $\{S(f; Q) ; Q \in \mathbb{P}[a, b]\}$. Como o ínfimo é a maior cota inferior, temos

$$I(f; P) \leq \inf \{S(f; Q) ; Q \in \mathbb{P}[a, b]\} \quad \forall P \in \mathbb{P}[a, b].$$

Portanto, $\inf \{S(f; Q) ; Q \in \mathbb{P}[a, b]\}$ é cota superior de $\{I(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\}$. Finalmente, usando que o supremo e a menor cota inferior obtemos o resultado. ■

8.2 Integral e funções integráveis.

DEFINIÇÃO 8.7. *Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Dizemos que f é (Riemann) integrável em $[a, b]$ se*

$$\sup \{I(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\} = \inf \{S(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\}.$$

Neste caso, a **integral** de f em $[a, b]$ é definida por

$$\int_a^b f(x)dx = \inf \{S(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\}.$$

Neste texto, ao dizer que uma função é integrável ficará subentendido que ela é limitada.

EXEMPLO 8.8. *Sejam f e a como no Exemplo 8.3. Temos f é integrável em $\{a\}$ e*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

EXEMPLO 8.9. *Considere uma função f constante, igual a c , em $[a, b]$. Vimos no Exemplo 8.4 que $I(f; P) = S(f; P) = c(b - a)$ para toda $P \in \mathbb{P}[a, b]$. Segue daí que f é integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f(x)dx = c(b - a).$$

EXEMPLO 8.10. *Considere a função f dada por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que f é integrável em $[0, 1]$ e que sua integral, neste intervalo, vale $1/2$. Para isto, tomemos $n \in \mathbb{N}$ e consideremos a partição $P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$, sendo*

$$x_i = \frac{i}{n} \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ temos

$$x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad M_i = \sup\{x ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_i = \frac{i}{n}.$$

Portanto,

$$S(f; P_n) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Analogamente obtemos $I(f; P_n) = (n-1)/2n$. Concluímos que

$$\frac{n-1}{2n} \leq \sup\{I(f; P) ; P \in \mathbb{P}[0, 1]\} \leq \inf\{S(f; P) ; P \in \mathbb{P}[0, 1]\} \leq \frac{n+1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow +\infty$ obtemos o resultado desejado.

EXEMPLO 8.11. Considere a função f dada por $f(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$, e $f(x) = -1$, se $x \notin \mathbb{Q}$. Vejamos que f não é integrável em nenhum intervalo $[a, b]$ não degenerado. Como \mathbb{Q} e \mathbb{Q}^c são densos em \mathbb{R} , qualquer intervalo aberto intercepta estes conjuntos. Portanto, para qualquer $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ partição de $[a, b]$ com $x_0 < \dots < x_n$, temos

$$\inf\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} = -1 \quad \text{e} \quad \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Logo, $I(f; P) = a - b$ e $S(f; P) = b - a$ para toda $P \in \mathbb{P}[a, b]$. Segue que

$$\sup\{I(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\} = a - b < 0 < b - a = \inf\{S(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\}.$$

Concluimos que f não é integrável em $[a, b]$.

No contexto da Integral de Lebesgue, a função do exemplo anterior é integrável e sua integral em $[a, b]$ é a mesma da função constante igual a -1 . Isto ocorre porque o conjunto onde f difere da função constante -1 (no caso, \mathbb{Q}) é, em certo sentido, “pequeno”. Em outras palavras, estas duas funções são iguais “em quase todo ponto”, logo, é razoável que tenham a mesma integral. Para finalizar gostaríamos de salientar que o sentido de “pequeno” e “quase todo ponto” não é o de cardinalidade mas estes estão relacionados. Trataremos deste assunto posteriormente.

Vejamos algumas propriedades importantes das funções integráveis. Começamos por um lema útil que será usado muitas vezes sem ser explicitamente mencionado. Portanto, é muito importante que o leitor memorize-o.

LEMA 8.12. Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Então, f é integrável em $[a, b]$ se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P \in \mathbb{P}[a, b] \quad \text{tal que} \quad S(f; P) - I(f; P) \leq \varepsilon. \quad (8.5)$$

Demonstração. Suponhamos que f seja integrável e seja s a sua integral, i.e.,

$$\sup\{I(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\} = s = \inf\{S(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, da definição de s segue que existem $P_1, P_2 \in \mathbb{P}[a, b]$ tais que

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < I(f; P_1) \leq s \leq S(f; P_2) < s + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $P = P_1 \cup P_2$, pela Proposição 8.5, temos

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < I(f; P_1) \leq I(f; P) \leq S(f; P) \leq S(f; P_2) < s + \frac{\varepsilon}{2}.$$

e, portanto, $S(f; P) - I(f; P) < \varepsilon$.

Reciprocamente, suponhamos que f não seja integrável. Para toda $P \in \mathbb{P}[a, b]$ temos

$$I(f; P) \leq \sup\{I(f; Q) ; Q \in \mathbb{P}[a, b]\} < \inf\{S(f; Q) ; Q \in \mathbb{P}[a, b]\} \leq S(f; P)$$

Portanto, tomando

$$\varepsilon = \frac{\inf \{S(f; Q) ; Q \in \mathbb{P}[a, b]\} - \sup \{I(f; Q) ; Q \in \mathbb{P}[a, b]\}}{2} > 0,$$

obtemos que $S(f; P) - I(f; P) > \varepsilon$, contrariando (8.5). ■

Reportamo-nos mais uma vez à Figura 8.1. Veja que a quantidade $S(f; P) - I(f; P)$ corresponde à área pintada de cinza e que não está riscada. O lema anterior nos diz que esta quantidade será arbitrariamente pequena (bastando tomar uma partição adequada) se, e somente se, f for integrável.

TEOREMA 8.13. *Se $f \in C([a, b])$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Sabemos que f é limitada em $[a, b]$, graças ao Teorema de Weierstrass. Mostremos que f é integrável.

Dado $\varepsilon > 0$, usando que f é uniformemente contínua em $[a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in [a, b] \text{ e } |x - y| < \delta \implies f(x) - f(y) < \varepsilon. \quad (8.6)$$

Seja $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $x_i - x_{i-1} < \delta$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Definindo,

$$m_i = \inf\{f(y) ; y \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ e } M_i = \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

de (8.6), obtemos $M_i - m_i \leq \varepsilon$. Portanto,

$$S(f; P) - I(f; P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a).$$

■

O Teorema 8.13 e o Exemplo 8.11 são duas faces da mesma moeda (perceba que a função vista naquele exemplo é descontínua em todo ponto). De fato, existe uma relação estreita entre a integrabilidade e continuidade dada pelo Teorema de Lebesgue (a seguir) do qual o Teorema 8.13 é um simples corolário. Outros resultados sobre integrabilidade a serem vistos nesta seção também o são. Preferimos, no entanto, dar demonstrações particulares para cada um deles como forma de aquecimento à intuição.

PROPOSIÇÃO 8.14. *Seja $c \in \mathbb{R}$. Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então $f + g$, cf e $f - g$ são integráveis em $[a, b]$ e*

i.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

ii.

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx;$$

iii.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstração. Deixo a cargo do leitor a prova (se ele ainda não a fez) de que $f + g$, cf e $f - g$ são limitadas em $[a, b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, como f e g são integráveis, existe $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ partição de $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx - \varepsilon < I(f; P) \leq S(f; P) < \int_a^b f(x)dx + \varepsilon. \quad (8.7)$$

e

$$\int_a^b g(x)dx - \varepsilon < I(g; P) \leq S(g; P) < \int_a^b g(x)dx + \varepsilon. \quad (8.8)$$

Mostremos que $f + g$ é integrável sobre $[a, b]$ e que vale (i). Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, temos

$$\sup \{f(x) + g(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq \sup \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} + \sup \{g(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Multiplicando por $x_i - x_{i-1}$ e somando de $i = 1$ até $i = n$ obtemos

$$S(f + g; P) \leq S(f; P) + S(g; P).$$

Desta desigualdade, de (8.7) e de (8.8) segue que

$$S(f + g; P) < \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx + 2\varepsilon.$$

Analogamente, mostra-se que

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - 2\varepsilon < I(f + g; P).$$

Das duas últimas desigualdades concluímos que $S(f + g; P) - I(f + g; P) < 4\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue do Lema 8.12 que $f + g$ é integrável. Além disto,

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - 2\varepsilon < \int_a^b (f(x) + g(x))dx < \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx + 2\varepsilon.$$

Finalmente, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos (i).

Mostremos agora que cf é integrável sobre $[a, b]$ e que vale (ii). Suponhamos $c \geq 0$ (o caso $c < 0$ é tratado de modo análogo). Multiplicando (8.7) por c e usando o resultado do Exercício 1, obtemos

$$c \int_a^b f(x)dx - c\varepsilon \leq I(cf; P) \leq c \int_a^b f(x)dx \leq S(cf; P) \leq c \int_a^b f(x)dx + c\varepsilon.$$

Segue que $S(cf; P) - I(cf; P) \leq 2c\varepsilon$. Novamente, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, do Lema 8.12, obtemos que cf é integrável. Tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ concluímos (ii).

Obtemos que $f - g$ é integrável em $[a, b]$ e que vale (iii) como consequência imediata dos resultados já demonstrados. ■

No espírito da proposição anterior, o leitor pode perguntar sobre o produto e o quociente de funções integráveis. Observamos, desde já, que o quociente de funções limitadas pode não ser limitado (quando o denominador tende a zero em algum ponto). Sobre o produto, será preferível adiar um pouco esta questão. Antes disto demonstraremos duas proposições.

PROPOSIÇÃO 8.15. *Sejam f e g integráveis em $[a, b]$. Se $f \leq g$ em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstração. Seja $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Do Exercício (9.a) do Capítulo 3, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, obtemos

$$\sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq \sup\{g(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Multiplicando por $x_i - x_{i-1}$ e somando de $i = 1$ até $i = n$ obtemos

$$S(f; P) \leq S(g; P) \quad \forall P \in \mathbb{P}[a, b].$$

Finalmente, do Exercício (9.b) do Capítulo 3, obtemos

$$\inf\{S(f; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\} \leq \inf\{S(g; P) ; P \in \mathbb{P}[a, b]\}.$$

Que é a conclusão desejada. ■

PROPOSIÇÃO 8.16. *Se f é integrável em $[a, b]$, então $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Demonstração. Mais uma tarefa para o leitor: mostrar que $|f|$ é limitada em $[a, b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $S(f; P) - I(f; P) \leq \varepsilon$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, denotamos

$$m_i = \inf\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$\bar{m}_i = \inf\{|f(x)| ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad \bar{M}_i = \sup\{|f(x)| ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Se $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, então $f(x), f(y) \in [m_i, M_i]$. Portanto, $|f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i$. Da desigualdade triangular obtemos

$$|f(x)| - |f(y)| \leq M_i - m_i \implies |f(x)| \leq |f(y)| + M_i - m_i.$$

Como o supremo é a menor cota superior, temos

$$\bar{M}_i \leq |f(y)| + M_i - m_i \implies \bar{M}_i - M_i + m_i \leq |f(y)|.$$

Como o ínfimo é a maior cota inferior, temos

$$\bar{M}_i - M_i + m_i \leq \bar{m}_i \implies \bar{M}_i - \bar{m}_i \leq M_i - m_i.$$

Multiplicando a última relação por $x_i - x_{i-1}$ e somando de $i = 1$ até $i = n$ obtemos

$$S(|f|; P) - I(|f|; P) \leq S(f; P) - I(f; P) \leq \varepsilon.$$

Do Lema 8.12 concluímos que $|f|$ é integrável.

Como $f \leq |f|$ e $-f \leq |f|$, temos que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx;$$

$$-\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (-f(x)) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Daí obtemos a conclusão final. ■

A recíproca da proposição anterior é falsa. Ou seja, $|f|$ pode ser limitada e integrável em $[a, b]$, sem que f seja integrável neste intervalo. Por exemplo, considere a função f dada por $f(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$, e $f(x) = -1$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Já vimos que f não é integrável em $[0, 1]$. Porém, a função $|f|$ é constante (igual a 1) e, portanto, integrável neste intervalo. Este é um exemplo de desvantagem da integral de Riemann em relação a de Lebesgue: f é integrável a Lebesgue se, e somente se, $|f|$ também é.

PROPOSIÇÃO 8.17. *Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então fg é integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Aqui também fica a cargo do leitor a demonstração de que fg é limitada em $[a, b]$.

Inicialmente, vamos considerar o caso particular em que $f = g$. Pela Proposição 8.16 temos que $|f|$ é limitada (digamos, pela cota superior $M > 0$) e integrável. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$S(|f|; P) - I(|f|; P) \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, denotamos

$$m_i = \inf\{|f(x)|; x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{|f(x)|; x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$\bar{m}_i = \inf\{f(x)^2; x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad \bar{M}_i = \sup\{f(x)^2; x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Desta forma, para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$, temos $m_i^2 \leq f(x)^2 \leq M_i^2$. Portanto,

$$m_i^2 \leq \bar{m}_i \leq f(x)^2 \leq \bar{M}_i \leq M_i^2.$$

Concluimos daí que

$$\begin{aligned} S(f^2; P) - I(f^2; P) &= \sum_{i=1}^n (\bar{M}_i - \bar{m}_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (M_i^2 - m_i^2)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (M_i + m_i)(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = 2M[S(|f|; P) - I(|f|; P)] \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Pelo Lema 8.12 obtemos que f^2 é integrável.

O caso geral segue imediatamente do caso particular já demonstrado, da Proposição 8.14 e da igualdade

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}.$$

■

O leitor deve perceber que é errado afirmar que a integral do produto é o produto das integrais (procure um contra-exemplo).

PROPOSIÇÃO 8.18. *Seja $c \in (a, b)$. Uma função f é integrável em $[a, b]$ se, e somente se, ela é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$. Neste caso,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (8.9)$$

Demonstração. Fica (mais uma vez) para o leitor a tarefa de provar que f é limitada em $[a, b]$ se, e somente se, f é limitada em $[a, c]$ e em $[c, b]$.

Sejam $P \in \mathbb{P}[a, b]$, $P_1 \in \mathbb{P}[a, c]$ e $P_2 \in \mathbb{P}[c, b]$ tais que $P = P_1 \cup P_2$. Mais precisamente, podemos escrever

$$P_1 = \{x_0, \dots, x_n\}, \quad P_2 = \{x_n, \dots, x_m\} \quad \text{e} \quad P = \{x_0, \dots, x_n, \dots, x_m\}.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ definimos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Temos

$$\begin{aligned} S(f; P) &= \sum_{i=1}^m \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \Delta x_i + \sum_{i=n+1}^m \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \Delta x_i \\ &= S(f; P_1) + S(f; P_2). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, mostra-se que $I(f; P) = I(f; P_1) + I(f; P_2)$.

Se f é integrável em $[a, b]$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathbb{P}[a, b]$ tal que $S(f; P) - I(f; P) \leq \varepsilon$. Graças à Proposição 8.5 podemos supor que $c \in P$. Tomando P_1 e P_2 como antes, obtemos

$$[S(f; P_1) - I(f; P_1)] + [S(f; P_2) - I(f; P_2)] = S(f; P) - I(f; P) \leq \varepsilon.$$

As quantidades entre colchetes são positivas e têm soma inferior ou igual a ε , logo, cada uma delas é inferior ou igual a ε . Portanto, f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$.

Reciprocamente, se f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então, dado $\varepsilon > 0$, existem $P_1 \in \mathbb{P}[a, c]$ e $P_2 \in \mathbb{P}[c, b]$ tais que

$$\int_a^c f(x)dx - \varepsilon \leq I(f; P_1) \leq S(f; P_1) \leq \int_a^c f(x)dx + \varepsilon$$

e

$$\int_c^b f(x)dx - \varepsilon \leq I(f; P_2) \leq S(f; P_2) \leq \int_c^b f(x)dx + \varepsilon.$$

Somando, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx - 2\varepsilon &\leq I(f; P_1) + I(f; P_2) \leq S(f; P_1) + S(f; P_2) \\ &\leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, para $P = P_1 \cup P_2$, temos

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx - 2\varepsilon \leq I(f; P) \leq S(f; P) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + 2\varepsilon.$$

Segue daí que $S(f; P) - I(f; P) \leq 4\varepsilon$. Concluimos que f é integrável em $[a, b]$. Além disto, da relação acima obtemos,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx - 2\varepsilon \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + 2\varepsilon.$$

Terminamos a demonstração tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Seja f uma função limitada e integrável em $[0, b]$. Se $0 < a < b$, então, pela proposição anterior,

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx. \quad (8.10)$$

Do resultado obtido no Exemplo 8.8 obtemos que (8.10) também vale para $a = 0$ ou $a = b$. Suponhamos agora que $0 < b < a$. Neste caso, (8.10) perde o sentido pois o segundo termo do lado direito não está definido. Entretanto, se f é limitada e integrável em $[0, a]$, então, novamente pela proposição anterior, podemos dizer que

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_b^a f(x)dx.$$

Comparando a igualdade acima com (8.10) concluímos que só existe uma forma de definir a integral de a até b , com $b < a$, para que (8.10) faça sentido. Esta é a motivação para a próxima definição.

DEFINIÇÃO 8.19. *Seja f integrável em $[a, b]$. A integral de f de b até a é definida por*

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

Feita esta definição, temos a seguinte generalização para (8.9).

PROPOSIÇÃO 8.20. *Seja f integrável em $[A, B]$. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

quaisquer que sejam $a, b, c \in [A, B]$.

Demonstração. É consequência da Proposição 8.18 e da Definição 8.19 (verifique). ■

8.3 Os Teoremas Fundamentais do Cálculo.

TEOREMA 8.21. (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo) *Se F é derivável em $[a, b]$, e $f = F'$ é integrável em $[a, b]$, então*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Tomemos $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, partição de $[a, b]$, tal que $S(f; P) - I(f; P) \leq \varepsilon$. Temos

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, aplicando o Teorema do Valor Médio a F em $[x_{i-1}, x_i]$, obtemos a existência de $y_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(y_i)(x_i - x_{i-1})$. Substituindo na relação acima obtemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(y_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(y_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Como $y_i \in (x_{i-1}, x_i)$, temos

$$\inf\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq f(y_i) \leq \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Portanto,

$$I(f; P) \leq F(b) - F(a) \leq S(f; P).$$

Além disto,

$$I(f; P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f; P).$$

Das duas últimas relações obtemos

$$\left| [F(b) - F(a)] - \int_a^b f(x)dx \right| \leq S(f; P) - I(f; P) \leq \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluímos o resultado. ■

Cuidado! O teorema anterior não diz que se F é derivável, então $f = F'$ é integrável. De fato, Volterra¹ [19] encontrou um exemplo de função derivável com derivada limitada, porém, não integrável.

TEOREMA 8.22. (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo) *Se f é integrável em $[a, b]$, então $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds \quad \forall x \in [a, b].$$

é Lipschitz contínua. Além disto, se f é contínua em $x_0 \in [a, b]$, então F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

¹Vito Volterra: * 03/05/1860, Ancona, Itália - † 11/10/1940, Roma, Itália.

Demonstração. Sejam $x, y \in [a, b]$ com $y < x$. Seja ainda $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(s)| \leq M$ para todo $s \in [a, b]$. Temos

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(s)ds - \int_a^y f(s)ds \right| = \left| \int_a^x f(s)ds + \int_y^a f(s)ds \right| \\ &= \left| \int_y^x f(s)ds \right| \leq \int_y^x |f(s)|ds \leq \int_y^x Mds = M|x - y|. \end{aligned}$$

Isto demonstra a primeira parte do teorema.

Suponhamos que f seja contínua em x_0 . Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ tal que

$$s \in [a, b] \quad \text{e} \quad |s - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(s) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Assim, para todo $x \in [a, b]$, com $0 < |x - x_0| < \delta$, temos

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left[\int_a^x f(s)ds - \int_a^{x_0} f(s)ds \right] = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(s)ds.$$

Subtraindo $f(x_0)$ na equação anterior e observando que

$$f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)ds,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(s)ds - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(s) - f(x_0))ds \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(s) - f(x_0)|ds \\ &\leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon ds = \varepsilon. \end{aligned}$$

Daí segue o resultado. ■

COROLÁRIO 8.23. Sejam $f \in C([a, b])$, $c \in \mathbb{R}$ e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = c + \int_a^x f(s)ds \quad \forall x \in [a, b].$$

Então $F' = f$.

Demonstração. Trivial. ■

DEFINIÇÃO 8.24. Se F é derivável em $[a, b]$ com $F' = f$, então dizemos que F é uma **primitiva, antiderivada ou integral indefinida** de f em $[a, b]$.

O Corolário 8.23 diz que se $f \in C([a, b])$, então F é uma primitiva de f em $[a, b]$.

8.4 Mudança de variáveis e integração por partes.

PROPOSIÇÃO 8.25. *Seja g derivável em $[a, b]$ com g' integrável neste intervalo. Se f é contínua em $g([a, b])$, então*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx.$$

Demonstração. A função f é contínua e, portanto, integrável. Também é integrável o produto das funções integráveis $f \circ g$ e g' (observe que $f \circ g$ é contínua).

Pelos Teoremas de Weierstrass e do Valor Intermediário, temos que $g([a, b])$ é o intervalo fechado $[c, d]$, sendo c e d , respectivamente, os valores mínimo e máximo de g em $[a, b]$. Assim, a função contínua f tem primitiva F em $[c, d]$. Pela Regra da Cadeia, para todo $x \in [a, b]$, temos $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

e

$$F(g(b)) - F(g(a)) = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx.$$

Daí segue o resultado. ■

PROPOSIÇÃO 8.26. *Sejam f e g funções deriváveis em $[a, b]$ com f' e g' integráveis. Então*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx.$$

O resultado segue daí, observando que $f'g$ e fg' são integráveis (Proposição 8.17) e usando a Proposição 8.14 (i). ■

8.5 O Teorema de Lebesgue.

Já vimos que funções contínuas são integráveis e comentamos que a integrabilidade está relacionada com a continuidade, ou melhor, com a descontinuidade. De fato, o Teorema de

Lebesgue, que veremos nesta seção, nos diz que uma função f limitada em $[a, b]$ é integrável neste intervalo se, e somente se, ela não é “muito” descontínua aí, ou, em outros termos, se o conjunto dos pontos de $[a, b]$ onde f é descontínua é “pequeno”.

Começamos por precisar o que queremos dizer por “pequeno” no parágrafo anterior.

DEFINIÇÃO 8.27. Dizemos que $A \subset \mathbb{R}$ tem **medida** (de Lebesgue) **nula** se para todo $\varepsilon > 0$, existe uma seqüência $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos e limitados tal que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| \leq \varepsilon,$$

sendo que $|I|$ representa o comprimento do intervalo I , ou seja, $|I| = b - a$ se $I = (a, b)$.

Conjuntos finitos ou, mais geralmente, enumeráveis tem medida nula como veremos nos dois exemplos a seguir.

EXEMPLO 8.28. Seja $A = \{x_1, \dots, x_m\}$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2m}, x_n + \frac{\varepsilon}{2m} \right),$$

se $n \leq m$, ou $I_n = \emptyset$, se $n > m$. É imediato que $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Além disto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^m |I_n| = \sum_{n=1}^m \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Portanto, A tem medida nula.

O argumento do próximo exemplo é uma pequena sofisticação do anterior.

EXEMPLO 8.29. Seja $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right).$$

É imediato que $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Além disto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Portanto, A tem medida nula.

É fácil perceber que o intervalo $[a, b]$, com $a < b$, não tem medida nula (pense nisto). A demonstração mais natural deste fato, na opinião do autor, é tediosa, ou então, repleta de afirmações, sem prova, do tipo “é fácil ver que”. Outra demonstração menos natural, porém mais elegante, é indicada no Exercício 6.

PROPOSIÇÃO 8.30. *Seja f limitada em $[a, b]$. Se o conjunto*

$$D = \{x \in [a, b] ; f \text{ é descontínua em } x\}$$

tem medida nula, então f é integrável.

Demonstração. Se $a = b$, então não há nada a ser demonstrado. Suponhamos que $a < b$.

Como f é limitada, existe $M > 0$ tal que $-M \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Desta forma, para todo intervalo $[c, d] \subset [a, b]$, temos que

$$\sup\{f(x) ; x \in [c, d]\} - \inf\{f(x) ; x \in [c, d]\} \leq M - (-M) = 2M. \quad (8.11)$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como D tem medida nula, existe uma seqüência $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos e limitados tal que

$$D \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} I_m \quad \text{e} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} |I_m| \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Para cada $y \in [a, b]$ onde f é contínua (i.e. $y \notin D$), existe $\delta_y > 0$ tal que

$$x \in [y - \delta_y, y + \delta_y] \cap [a, b] \implies f(y) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f(y) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Desta forma, para todo intervalo $[c, d] \subset [y - \delta_y, y + \delta_y] \cap [a, b]$, temos que

$$\begin{aligned} \sup\{f(x) ; x \in [c, d]\} - \inf\{f(x) ; x \in [c, d]\} &\leq \left[f(y) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right] - \left[f(y) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Tomemos $J_y = (y - \delta_y, y + \delta_y)$. A coleção $\mathcal{C} = \{I_n ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{J_y ; y \in [a, b] \setminus D\}$ é uma cobertura aberta para $[a, b]$. Portanto, existem $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$ e $y_1, \dots, y_q \in [a, b] \setminus D$ tais que

$$[a, b] \subset I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_p} \cup J_{y_1} \cup \dots \cup J_{y_q}.$$

O conjunto P , formado pelos elementos de $[a, b]$ que são extremos de algum dos intervalos $[a, b], I_{n_1}, \dots, I_{n_p}, J_{y_1}, \dots, J_{y_q}$ tem, no máximo, $2+2(p+q)$ elementos. Portanto, $P \in \mathbb{P}[a, b]$. Escrevendo $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos

$$m_i = \inf\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e} \quad M_i = \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Da definição de P segue que, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, uma das duas possibilidades abaixo ocorre:

- i. $[x_{i-1}, x_i] \subset \overline{I_{n_k}}$, para algum $k \in \{1, \dots, p\}$;

ii. $[x_{i-1}, x_i] \subset \overline{J_{y_k}}$, para algum $k \in \{1, \dots, q\}$.

Dividimos o conjunto $\{1, \dots, n\}$ em duas partes, U e V , sendo U formada pelos elementos para os quais ocorre a primeira possibilidade acima e V a parte complementar de U . Desta forma, de (8.11) e (8.12), obtemos

$$M_i - m_i \leq \begin{cases} 2M & \text{se } i \in U, \\ \frac{\varepsilon}{2(b-a)} & \text{se } i \in V. \end{cases}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} S(f; P) - I(f; P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq 2M \sum_{i \in U} (x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i \in V} (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq 2M \sum_{m=1}^{+\infty} |I_m| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

e, portanto, f é integrável. ■

Vale a recíproca da Proposição 8.30. Porém, antes de demonstrá-la necessitamos de um lema que é importante por si só.

LEMA 8.31. *Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de conjuntos de medida nula, então $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ tem medida nula.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que A_n tem medida nula. Logo, existe uma seqüência $(I_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos e limitados tal que

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} I_m^{(n)} \quad \text{e} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} |I_m^{(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Sabemos que \mathbb{N}^2 é enumerável. Logo, existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ bijetiva. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos $(m_i, n_i) = f(i)$ e $J_i = I_{m_i}^{(n_i)}$.

Se $x \in A$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$, existe também $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in I_m^{(n)}$. Finalmente, tomando $i = f^{-1}(m, n)$, temos $(m, n) = f(i) = (m_i, n_i)$ e, portanto, $x \in J_i$. Acabamos de mostrar que a seqüência $(J_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos satisfaz

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} J_i.$$

Dado $j \in \mathbb{N}$, sejam $M_j = \max\{m_1, \dots, m_j\}$ e $N_j = \max\{n_1, \dots, n_j\}$. Temos

$$\sum_{i=1}^j |J_i| = \sum_{i=1}^j |I_{m_i}^{(n_i)}| \leq \sum_{n=1}^{N_j} \sum_{m=1}^{M_j} |I_m^{(n)}| \leq \sum_{n=1}^{N_j} \sum_{m=1}^{+\infty} |I_m^{(n)}| \leq \sum_{n=1}^{N_j} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Concluimos a demonstração tomando o limite quando $j \rightarrow +\infty$. ■

TEOREMA 8.32. (Lebesgue) *Seja f limitada em $[a, b]$. Então, f é integrável em $[a, b]$ se, e somente se, o conjunto*

$$D = \{x \in [a, b] ; f \text{ é descontínua em } x\}$$

tem medida nula.

Demonstração. Já vimos (Proposição 8.30) que se D tem medida nula, então f é integrável. Tratemos agora da recíproca. Podemos supor $a < b$, pois senão, não há nada a ser demonstrado.

Para cada $x \in D$, como f é descontínua em x , existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0 \quad \exists y \in [a, b] \quad \text{com} \quad |x - y| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Neste caso, tomando $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/m < \varepsilon$, fica demonstrado que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in D_m$, sendo

$$D_m = \{x \in D ; \forall \delta > 0 \quad \exists y \in [a, b] \quad \text{com} \quad |x - y| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(y)| > 1/m\}.$$

Ou seja $D = \bigcup_{m=1}^{+\infty} D_m$. De acordo com o Lema 8.31, para mostrar que D tem medida nula basta mostrar que D_m tem medida nula, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$.

Fixemos $m \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $P \in \mathbb{P}[a, b]$ tal que $S(f; P) - I(f; P) \leq \varepsilon/2m$. Escrevemos $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ e, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos $J_i = (x_{i-1}, x_i)$,

$$m_i = \inf\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e} \quad M_i = \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Definindo $I = \{i \in \{1, \dots, n\} ; D_m \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset\}$, obtemos que $D_m \setminus P \subset \bigcup_{i \in I} J_i$. Vamos mostrar que

$$\sum_{i \in I} |J_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.13}$$

Observamos que se $i \in I$, então existe $x \in D_m \cap (x_{i-1}, x_i)$. Da definição de D_m , obtemos que existe $y \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que $|f(x) - f(y)| > 1/m$ e, portanto, $M_i - m_i > 1/m$. Agora, se (8.13) não fosse verdade, então teríamos a seguinte contradição:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2m} &< \frac{1}{m} \sum_{i \in I} |J_i| = \frac{1}{m} \sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i \in I} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S(f; P) - I(f; P) \leq \frac{\varepsilon}{2m}. \end{aligned}$$

Como P tem $n + 1$ elementos, existem intervalos abertos e limitados I_0, \dots, I_n tais que $P \subset I_0 \cup \dots \cup I_n$ e $|I_0| + \dots + |I_n| \leq \varepsilon/2$. Finalmente, obtemos

$$D_m \subset I_0 \cup \dots \cup I_n \cup \bigcup_{i \in I} J_i \quad \text{e} \quad |I_0| + \dots + |I_n| + \sum_{i \in I} |J_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto D_m tem medida nula. ■

8.6 Exercícios.

1 - Sejam $c \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{P}[a, b]$ e f uma função limitada em $[a, b]$. Mostre que

a) se $c \geq 0$, então $S(cf; P) = cS(f; P)$ e $I(cf; P) = cI(f; P)$;

b) se $c \leq 0$, então $S(cf; P) = cI(f; P)$ e $I(cf; P) = cS(f; P)$.

2 - Sejam $P, Q \in \mathbb{P}[a, b]$ e f uma função limitada em $[a, b]$. Mostre que se $P \subset Q$, então $I(f; P) \leq I(f; Q) \leq S(f; Q) \leq S(f; P)$.

3 - Este exercício mostra que podemos alterar uma função integrável em um ponto sem perder a integrabilidade nem alterar a integral. Sejam $c \in [a, b]$ e f uma função limitada e integrável em $[a, b]$. Suponhamos que g é uma função definida em $[a, b]$ e tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{c\}$. Mostre que g é limitada e integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Sugestão: Para simplificar a demonstração, considere inicialmente os casos $c = a$ e $c = b$. Depois use a Proposição 8.18. Para concluir o caso geral.

4 - O objetivo deste exercício é generalizar o resultado do exercício anterior. Sejam $c_1, \dots, c_n \in [a, b]$ e f uma função limitada e integrável em $[a, b]$. Suponhamos que g é uma função definida em $[a, b]$ e tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{c_1, \dots, c_n\}$. Mostre que g é limitada e integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Sugestão: Proceda por indução e use o resultado do exercício anterior.

5 - Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $c \leq a \leq b \leq d$. Mostre que $\chi_{(a,b)}$, e $\chi_{[a,b]}$ são integráveis em $[c, d]$ e

$$\int_c^d \chi_{(a,b)}(x)dx = \int_c^d \chi_{[a,b]}(x)dx = b - a.$$

6 - Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$, e $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de intervalos abertos e limitados tais que

$$[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n.$$

a) Mostre que existem $n_1, \dots, n_j \in \mathbb{N}$ tais que $[a, b] \subset I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_j}$.

b) Mostre que $b - a < \sum_{i=1}^j |I_{n_i}|$.

c) Conclua que se $a < b$, então $[a, b]$ não tem medida nula.

Sugestão: Em (6.b) considere as funções características dos intervalos $[a, b], I_{n_1}, \dots, I_{n_j}$ e use os Exercícios 8 e 5.

7 - Seja $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que se $A^\circ \neq \emptyset$, então A não tem medida nula.

8 - Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que se f é contínua, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

então $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Capítulo 9

Seqüências de funções

9.1 Convergência simples.

Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma função $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$. Neste capítulo estudaremos em que sentido a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Existem muitos modos de se definir convergência de funções: pontual, uniforme, em L^p , em medida, etc. Abordaremos aqui apenas as duas primeiras.

DEFINIÇÃO 9.1. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções de A em \mathbb{R} . Dizemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplesmente para $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

Em outras palavras, para todo $x \in A$, a seqüência (numérica) $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(x)$. Segundo a definição de seqüência convergente, temos

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (9.1)$$

EXEMPLO 9.2. *Seja $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x/n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Dados $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > |x|/\varepsilon$. Assim, se $n \geq N$, então*

$$\left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|}{N} < \varepsilon.$$

Portanto, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplesmente para a função nula.

EXEMPLO 9.3. *Seja $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0, 1]$. Se $x \in [0, 1)$, então $x^n \rightarrow 0$ e se $x = 1$, então $x^n \rightarrow 1$. Portanto, a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é simplesmente convergente para $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Salientamos que, na Definição 9.1, o valor de N depende de x e ε . Quando N não depende de x , mas apenas de ε , temos outro sentido de convergência, assunto da próxima seção.

9.2 Convergência uniforme.

DEFINIÇÃO 9.4. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções de A em \mathbb{R} . Dizemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A. \quad (9.2)$$

É imediato que a convergência uniforme implica na convergência simples. A recíproca, entretanto, é falsa como veremos no Exemplo 9.7.

EXEMPLO 9.5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x/n$ para todo $x \in [0, 1]$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 1/\varepsilon$. Assim, se $n \geq N$ e $x \in [0, 1]$, então*

$$\left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Portanto, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função nula.

Salientamos novamente a diferença entre convergência simples e uniforme através da comparação dos exemplos 9.2 e 9.5. No primeiro exemplo o valor de N depende de x e de ε ($N > |x|/\varepsilon$), enquanto que no segundo ele só depende de ε ($N > 1/\varepsilon$).

9.3 Continuidade.

No Exemplo 9.3 apresentamos uma seqüência de funções contínuas que converge simplesmente para uma função descontínua. A próxima proposição diz que este inconveniente não ocorre se a convergência for uniforme.

PROPOSIÇÃO 9.6. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções de $A \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R} convergente uniformemente para $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se f_n é contínua em $x_0 \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é contínua em x_0 .*

Demonstração. Seja $x_0 \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in A \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Como f_n é contínua em x_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, \quad |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Destas duas relações obtemos que se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$, então

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

Segue que f é contínua em x_0 . ■

EXEMPLO 9.7. *Da proposição anterior podemos concluir que a convergência do Exemplo 9.3 não é uniforme, pois, senão, o limite seria contínuo em $x_0 = 1$. Entretanto, se $a \in (0, 1)$, então a seqüência $(f_n|_{[0,a]})_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente convergente. Isto pode ser verificado diretamente ou usando o próximo teorema (ver Exercício 2).*

TEOREMA 9.8. (Dini¹) *Sejam $K \subset \mathbb{R}$ compacto e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona e convergente simplesmente para $f \in C(K)$, então a convergência é uniforme.*

Demonstração. Suponhamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja decrescente (se for crescente, procedemos de modo análogo), ou seja, $f \leq f_{n+1} \leq f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f \in C(K)$ e, como K é compacto, existe $x_n \in K$ tal que $M_n = f_n(x_n) - f(x_n)$ é o valor máximo de $f_n - f$. É fácil ver que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente e positiva e, portanto, convergente para $c \geq 0$. Mostremos que $c = 0$.

Da compacidade de K , obtemos subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente para $x_0 \in K$. Para $k, m \in \mathbb{N}$ com $n_k \geq m$, temos $M_{n_k} = f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k}) \leq f_m(x_{n_k}) - f(x_{n_k})$. Fazendo $k \rightarrow +\infty$, obtemos $c \leq f_m(x_0) - f(x_0)$. Tomando o limite quando $m \rightarrow +\infty$, concluímos que $c \leq 0$ e, portanto, $c = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_N < \varepsilon$. Assim, se $n \geq N$ e $x \in K$, então

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq f_N(x) - f(x) \leq M_N < \varepsilon.$$

Segue que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $x \in K$ e $n \geq N$, ou seja, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f . ■

9.4 Integral.

A convergência simples não se comporta muito bem com respeito a integral, como mostra o exemplo a seguir.

¹Ulisse Dini: * 14/11/1845, Pisa, Itália - † 28/10/1918, Pisa, Itália

EXEMPLO 9.9. Como $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ é enumerável, podemos escrever $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\}$. Considere a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{x_1, \dots, x_n\}, \\ 0 & \text{senão.} \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f_n é finito e, portanto, de medida nula. Logo, f_n é integrável (e sua integral é nula). É fácil perceber que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a função que vale um nos racionais e zero no irracionais que, como sabemos, não é integrável.

Novamente, este é um problema da convergência simples, inexistente para a convergência uniforme.

TEOREMA 9.10. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis no intervalo $[a, b]$ convergente uniformemente para f . Então f é integrável e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $D_n = \{x \in [a, b] ; f_n \text{ é descontínua em } x\}$. Como f_n é integrável, D_n tem medida nula. Portanto, também tem medida nula o conjunto $D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [a, b] \setminus D$ temos que f_n é contínua em x . Logo, graças à convergência uniforme, f é contínua em x . Concluímos que D contém todos os pontos de descontinuidade de f e que, portanto, f é integrável.

Seja $\varepsilon > 0$ e tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $x \in A$ e $n \geq N$. Temos então

$$\left| \int_a^b f_n(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx \leq \int_a^b \varepsilon \, dx = (b - a)\varepsilon.$$

De onde segue o resultado. ■

9.5 Derivada.

Como uma seqüência de funções contínuas pode convergir simplesmente para uma função descontínua, não é de se esperar que este tipo de convergência se comporte bem com derivadas. Neste caso, mesmo a convergência uniforme não é muito satisfatória, como mostra o próximo exemplo.

EXEMPLO 9.11. Seja $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \text{sen}(nx)/n$. Dado $\varepsilon > 0$, se $N > 1/\varepsilon$, então, para $n \geq N$ e $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{|\text{sen}(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Portanto $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente $f = 0$. Por outro lado, a seqüência $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para $f' = 0$, pois, por exemplo,

$$f'_n(0) = \cos(n \cdot 0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIÇÃO 9.12. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^1([a, b])$. Se existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge e se $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma primitiva de g .*

Demonstração. Dado $x \in [a, b]$, pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(s) ds.$$

Como $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente para, digamos, c e como $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente convergente para g , obtemos que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para

$$f(x) = c + \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

Mas g é contínua (pois é limite uniforme de uma seqüência de funções contínuas), logo, do Corolário 8.23, segue que f é uma primitiva de g .

Para concluir que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f , tome $\varepsilon > 0$ e escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ tenhamos

$$|f_n(x_0) - c| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |f'_n(s) - g(s)| < \varepsilon, \quad \forall s \in [a, b].$$

Obtemos então que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x_0) - c| + \left| \int_{x_0}^x (f'_n(s) - g(s)) ds \right| \\ &< \varepsilon + \left| \int_{x_0}^x \varepsilon ds \right| = (1 + |x - x_0|)\varepsilon \leq (1 + b - a)\varepsilon. \end{aligned}$$

■

9.6 O espaço $C(K)$.

Nesta seção K representará um subconjunto compacto não vazio de \mathbb{R} . Lembramos que

$$C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é contínua} \}.$$

O Corolário 6.16 nos dá que se $f, g \in C(K)$ e $c \in \mathbb{R}$, então $f + g \in C(K)$ e $cf \in C(K)$. Por esta razão, $C(K)$ é um **espaço vetorial**. Como em outros espaços vetoriais (\mathbb{R}^n , por exemplo), em $C(K)$ definimos o conceito de norma.

DEFINIÇÃO 9.13. Seja $f \in C(K)$. Definimos a **norma** de f por

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| ; x \in K\}.$$

Pelo Teorema de Weierstrass, toda $f \in C(K)$ é limitada e, portanto, o supremo que define $\|f\|$ é finito.

As principais propriedades da norma são dadas na proposição a seguir.

PROPOSIÇÃO 9.14. Sejam $f, g \in C(K)$ e $c \in \mathbb{R}$. Temos que

i. $\|f\| \geq 0$;

ii. se $\|f\| = 0$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in K$;

iii. $\|cf\| = |c|\|f\|$;

iv. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Demonstração. As propriedades (i) e (ii) são óbvias. O item (iii) segue de

$$\|cf\| = \sup\{|c||f(x)| ; x \in K\} = |c| \sup\{|f(x)| ; x \in K\} = |c|\|f\|.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup\{|f(x) + g(x)| ; x \in K\} \leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| ; x \in K\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| ; x \in K\} + \sup\{|g(x)| ; x \in K\} = \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

demonstra (iv). ■

Repare na semelhança entre a propriedade (iv) e a desigualdade triangular. Não por acaso, ela também é chamada de **Desigualdade triangular**.

Quando se deseja distinguir entre os vários tipos de norma, vários nomes são usados para a norma aqui definida: **norma do sup**, **norma C^0** , **norma infinito**, **norma L^∞** , etc. As razões para os dois primeiros nomes são óbvias (lembre-se que $C(K)$ também é denotado $C^0(K)$). Não nos interessam as razões para as duas últimas nomenclaturas. Outro nome bastante usado é **norma da convergência uniforme**. A razão será explicada pela Proposição 9.16.

DEFINIÇÃO 9.15. Uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ é dita **convergente** em $C(K)$ se existe $f \in C(K)$ de modo que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \quad \implies \quad \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $f_n \rightarrow f$ e dizemos que f é o **limite** da seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou que f_n **converge para** (ou **tende a**) f em $C(K)$ quando n tende a mais infinito ($n \rightarrow +\infty$).

Repare na grande semelhança entre esta definição e a Definição 4.7. Excluindo as diferenças de notação (x_n ou f_n) e a natureza dos elementos das seqüências (em \mathbb{R} ou $C(K)$), a diferença notável é que, aqui, aparece a norma (em $\|f_n - f\|$) e lá aparece o valor absoluto (em $|x_n - x|$).

Apesar desta diferença, como a norma tem propriedades semelhantes a do valor absoluto (notadamente, vale a desigualdade triangular), muitos dos resultados sobre seqüências em \mathbb{R} têm correspondentes para seqüências em $C(K)$. Como exercício, baseie-se na demonstração da Proposição 4.22 para mostrar que se $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$, então $f_n + g_n \rightarrow f + g$.

A próxima proposição esclarece a razão do nome norma da convergência uniforme.

PROPOSIÇÃO 9.16. *Sejam $f \in C(K)$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$. Então $f_n \rightarrow f$ se, e somente se, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f .*

Demonstração. Suponhamos que $f_n \rightarrow f$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $\|f_n - f\| < \varepsilon$. Ora, para todo $x \in K$, temos $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| < \varepsilon$. Portanto, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f .

Suponhamos agora que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uniformemente convergente para f . Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$. Por definição de supremo, $\|f_n - f\| = \sup\{|f_n(x) - f(x)|; x \in K\} \leq \varepsilon$. Portanto, $f_n \rightarrow f$. ■

Procuramos um resultado sobre seqüência de funções que tenha papel semelhante ao do Teorema de Bolzano-Weierstrass para as seqüências numéricas. Algo que diga que seqüências limitadas em $C(K)$ tem subseqüências convergentes em $C(K)$. A rigor, antes de poder enunciar tal teorema, será necessário definir:

- i. seqüência limitada em $C(K)$;
- ii. subseqüência de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$.

O item (ii) é imediato: na Definição 4.5, a condição que define subseqüência de uma seqüência de números reais, não considera a natureza dos elementos da seqüência. Ou seja, ela ignora que são números reais e considera apenas os índices. Portanto, a mesma definição tem sentido para seqüências em $C(K)$.

Para a limitação, lembremos que uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais é limitada quando existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Inspirados no que já fizemos, trocamos valor absoluto por norma.

DEFINIÇÃO 9.17. *Uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ é limitada se existe $M > 0$ tal que $\|f_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Cabe agora perguntar se toda seqüência limitada em $C(K)$ tem subseqüência convergente em $C(K)$. Infelizmente a resposta é não. Consideremos novamente a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ do

Exemplo 9.3. É imediato que $|f(x)| = |x^n| \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\|f_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Se ela tivesse subsequência convergente para f em $C(K)$, então esta seria uniformemente convergente para f e, portanto, simplesmente convergente para f . Concluiríamos que $f(x) = 0$, se $x \in [0, 1)$, e $f(x) = 1$, se $x = 1$. Contrariando a continuidade de f .

Precisamos de uma hipótese adicional para obter o resultado requerido.

TEOREMA 9.18. (Arzelà¹-Ascoli²) Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ é limitada e equicontínua, i.e.,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $x, y \in K, |x - y| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$,
então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem subsequência convergente em $C(K)$.

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}$, da equicontinuidade de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, obtemos $\delta_m > 0$ tal que se $x, y \in K$ e $|x - y| < \delta_m$, então $|f_n(x) - f_n(y)| < 1/m$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como K é compacto e $K \subset \bigcup_{z \in K} (z - \delta_m, z + \delta_m)$, existe $D_m \subset K$, finito, tal que

$$K \subset \bigcup_{z \in D_m} (z - \delta_m, z + \delta_m). \quad (9.3)$$

O conjunto $D = \bigcup_{m=1}^{+\infty} D_m$ é enumerável (pois é reunião enumerável de conjuntos finitos) e, portanto, podemos escrever $D = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Seja $M > 0$ tal que $\|f_n\| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$ temos $|f_n(x)| \leq \|f_n\| < M$ de modo que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Em particular, $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, ela tem subsequência $(g_{1,k}(x_1))_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Agora, usando que $(g_{1,n}(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ também é limitada obtemos subsequência $(g_{2,n}(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. Pela limitação de $(g_{2,n}(x_3))_{n \in \mathbb{N}}$ existe subsequência $(g_{3,n}(x_3))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. Repetindo o processo, construímos uma seqüência $((g_{i,n})_{n \in \mathbb{N}})_{i \in \mathbb{N}}$ de seqüências tais que, se $i \geq j$, então $(g_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ é subsequência de $(g_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(g_{j,n}(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Definimos $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ por $f_{n_k} = g_{k,k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que, se $y \in D$, então $(f_{n_k}(y))_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente. De fato, seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $y = x_j$. Se $k \geq j$, então $f_{n_k} = g_{k,k}$ é um termo de $(g_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Como $(g_{j,n}(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, concluímos a afirmação.

Mostremos que $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplesmente. Sejam $x \in K$, $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 3/\varepsilon$. De (9.3), obtemos que existe $y \in D_m$ tal que $|x - y| < \delta_m$ e, portanto,

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

¹Cesare Arzelà: * 06/03/1847, La Spezia, Itália - † 15/03/1912, La Spezia, Itália.

²Guido Ascoli: * 12/12/1887, Livorno, Itália - † 10/05/1957, Torino, Itália.

Em particular, para $k, l \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)| + |f_{n_k}(y) - f_{n_l}(y)| + |f_{n_l}(y) - f_{n_l}(x)| \\ &\leq |f_{n_k}(y) - f_{n_l}(y)| + \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Mas $y \in D$, logo, $(f_{n_k}(y))_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente e, portanto, de Cauchy. Segue de (9.4) que $(f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ também é de Cauchy e, portanto, convergente. Seja $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k}(x)$.

Falta mostrar que a convergência é uniforme. Seja $\varepsilon > 0$ e $m > 3/\varepsilon$. Escrevemos $D_m = \{y_1, \dots, y_p\}$. Como D_m é finito, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$, então

$$k \geq k_0 \quad \implies \quad |f_{n_k}(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall y \in D_m.$$

Qualquer que seja $x \in K$, já vimos que existe $y \in D_m$ para o qual vale (9.4). Fazendo $l \rightarrow +\infty$, obtemos

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq |f_{n_k}(y) - f(y)| + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.$$

O que conclui a demonstração. ■

Há um pequeno erro na demonstração acima: não é possível demonstrar que a seqüência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é estritamente crescente e, portanto, que $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como exemplo, considere que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja constante. Neste caso, qualquer $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaz as condições da demonstração! Este erro pode ser corrigido sem muito esforço (Exercício 3).

9.7 ★ Equações diferenciais.

Muitas situações físicas, econômicas, biológicas, ... são modeladas por **equações diferenciais ordinárias** (comumente abreviadas pela sigla EDO). Neste tipo de equação a incógnita é uma função (não um número). O termo “diferenciais” vem do fato que na equação aparece a derivada (de alguma ordem) da função incógnita. Nesta seção abordaremos apenas algumas questões referentes às equações diferenciais. Como aplicação do Teorema de Arzelà-Ascoli mostraremos a existência de solução de uma classe de EDO's. O leitor interessado em se aprofundar no assunto poderá consultar algum dos vários livros disponíveis como, por exemplo, [18].

EXEMPLO 9.19. Seja $g \in C([a, b])$. Procuramos $f \in C^1([a, b])$ tal que

$$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (9.5)$$

Este é um exemplo muito simples de EDO. A existência de solução é consequência imediata do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo. Observe que se f satisfaz (9.5), então isto também ocorre com $f + c$, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$. Desta forma, existem infinitas soluções. Porém, se impusermos que f assumo um dado valor no ponto a , então o Corolário 7.16

(vi) garante a unicidade. Resumindo, dados $g \in C([a, b])$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe uma única $f \in C^1([a, b])$ tal que

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) & \forall x \in [a, b], \\ f(a) = y_0. \end{cases}$$

Uma situação pouco mais complicada que a do exemplo anterior ocorre quando do lado direito da equação aparece a própria incógnita. Vejamos um exemplo.

EXEMPLO 9.20. Procuramos $f : C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = 1. \end{cases} \quad (9.6)$$

Já vimos (Exercício 10 do Capítulo 7) que existe no máximo uma solução de (9.6). Mostrar que existe alguma solução é tarefa mais elaborada que será deixada para depois. Por hora, diremos apenas que existe tal f , a chamada **função exponencial**, denotada por $f(x) = \exp(x)$ ou $f(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Agora vamos abordar outra questão relevante no estudo de soluções de equações diferenciais: a regularidade. De acordo com o enunciado, procuramos solução f na classe $C^1(\mathbb{R})$. Poderíamos ter sido menos exigentes, procurando f no conjunto das funções deriváveis (com derivadas não necessariamente contínuas). Nada ganhamos ou perdemos fazendo isto. De fato, se f é derivável e $f' = f$, então f' é contínua pois f é contínua. Concluimos que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Ora, como $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f' = f$ temos que $f' \in C^1(\mathbb{R})$, isto é, $f \in C^2(\mathbb{R})$. Continuando o argumento (chamado de **boot strap**) concluímos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Nas aplicações de EDO's em áreas externas à Matemática saber que determinado problema tem solução, única e regular (C^1 ou C^∞ , por exemplo) é quase sempre inútil. O que se espera, de fato, é encontrar tal solução. Não existem métodos gerais para encontrar expressões de soluções de EDO's. Há apenas uma quantidade pequena de "receitas" cada uma delas aplicável a um tipo particular de equação. O problema é mais sério do que o leitor, talvez, possa imaginar. Na maioria dos casos, as soluções de EDO's não podem ser escritas em termos das funções elementares comumente usadas! (O exemplo clássico é a função f tal que $f'(x) = e^{-x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.) Neste caso, devemos usar esquemas numéricos para a resolução de EDO's.

De maneira geral estamos interessados no seguinte problema. Dada $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, queremos encontrar $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e tal que

$$\begin{cases} f'(x) = g(f(x)) & \forall x \in [a, b], \\ f(a) = y_0. \end{cases} \quad (9.7)$$

Freqüentemente, a variável x é substituída por t e interpretada como tempo e a é considerado o tempo inicial. Por essa razão (9.7) é chamado de **Problema de Valor Inicial** (PVI) ou de **Problema de Cauchy**.

Para encontrar uma solução, ou melhor, uma aproximação para a solução de (9.7) o método numérico mais simples é o **Método de Euler**. A idéia deste método é a seguinte. Sejam f solução do PVI e $x_0 = a$. Se $x_1 > x_0$ é próximo de x_0 , então

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \implies f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = y_0 + g(y_0)(x_1 - x_0).$$

Assim, $y_1 = y_0 + g(y_0)(x_1 - x_0)$ é uma aproximação para $f(x_1)$ que será usada para obter uma aproximação para $f(x_2)$, sendo $x_2 > x_1$ próximo de x_1 . Temos

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \implies f(x_2) \approx f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \approx y_1 + g(y_1)(x_2 - x_1).$$

Ou seja $y_2 = y_1 + g(y_1)(x_2 - x_1)$ é uma aproximação para $f(x_2)$. Continuamos o processo da seguinte maneira. Dada uma partição (ou **malha**, como é chamada no contexto da Análise Numérica) $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, definimos y_1, \dots, y_n , indutivamente, por

$$y_i = y_{i-1} + g(y_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (9.8)$$

É razoável esperar que y_i seja uma boa aproximação para $f(x_i)$ tanto melhor quanto menor for $\max \{|x_i - x_{i-1}|; i \in \{1, \dots, n\}\}$. Nos outros pontos de $[a, b] \setminus P$ o valor da função f é aproximado pela função ϕ que é afim em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$, e que vale y_{i-1} e y_i em x_{i-1} e x_i , respectivamente. Mais precisamente, $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} y_0 & \text{se } x = a, \\ \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) \cdot (x - x_{i-1}) + y_{i-1} & \text{se } x_{i-1} < x \leq x_i. \end{cases} \quad (9.9)$$

O Método de Euler está na base da demonstração do Teorema de Peano.

TEOREMA 9.21. (Peano) *Seja $g \in C(\mathbb{R})$ limitada. Então, para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, existe $f \in C^1([a, b])$ satisfazendo (9.7).*

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $|g| \leq M$. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere a partição uniforme $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$. Ou seja,

$$|x_i - x_{i-1}| = \frac{b - a}{n}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Definimos y_1, \dots, y_n por (9.8) e $f_n = \phi$ dada em (9.9). Segue que se $x \in (x_{i-1}, x_i)$, então f_n é derivável em x e $f'_n(x) = g(y_{i-1}) = g(f_n(x_{i-1}))$. Logo, $|f'_n(x)| \leq M$.

Usando o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(s)ds = y_0 + \int_a^x f'_n(s)ds \quad \forall x \in [a, b]. \quad (9.10)$$

Da Proposição 8.16, obtemos

$$|f_n(x)| \leq |y_0| + \int_a^x |f'_n(s)|ds \leq |y_0| + M(b-a) = L \quad \forall x \in [a, b]. \quad (9.11)$$

Logo, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Com argumento análogo mostra-se que para $a \leq y \leq x \leq b$ temos

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \int_y^x |f'_n(s)|ds \leq M(x-y). \quad (9.12)$$

Segue, imediatamente, que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equicontínua. Graças ao Teorema de Arzelà-Ascoli, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem subsequência (também denotada $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$) convergente para f em $C([a, b])$. Vamos mostrar que f é solução de (9.7). De acordo com o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, basta mostrar que $f = \tilde{f}$, sendo $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = y_0 + \int_a^x g(f(s))ds \quad \forall x \in [a, b].$$

Faremos isto mostrando que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para \tilde{f} . Seja $\varepsilon > 0$. De (9.11) obtemos que $|f| \leq L$. Como g é uniformemente contínua no compacto $[-L, L]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$y, z \in [-L, L], |y - z| < \delta \implies |g(y) - g(z)| < \varepsilon.$$

Usando esta relação, (9.12) e supondo que $n \in \mathbb{N}$ seja suficientemente grande de modo que $M(b-a)/n < \delta$ e $\|f_n - f\| < \delta$, obtemos

$$\begin{aligned} |f_n(x) - \tilde{f}(x)| &\leq \int_a^x |f'_n(s) - g(f(s))|ds \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'_n(s) - g(f(s))|ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(f_n(x_{i-1})) - g(f(s))|ds \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[|g(f_n(x_{i-1})) - g(f_n(s))| + |g(f_n(s)) - g(f(s))| \right] ds \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} 2\varepsilon ds = 2(b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

O Teorema de Peano não garante a unicidade da solução. Considere, por exemplo, $[a, b] = [0, 1]$, $y_0 = 0$ e $g(y) = \sqrt{|y|}$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Verifica-se facilmente que, dado qualquer

$c \in (0, 1)$, a função $f_c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_c(x) = 0$, se $x \leq c$ e $f_c(x) = (x - c)^2/4$, se $x > c$, é solução do PVI correspondente. Sob hipóteses adicionais sobre g (pertencer a $C^1(\mathbb{R})$, por exemplo) é possível demonstrar a unicidade de solução (ver [11]).

É possível retirar a hipótese sobre a limitação de g mas paga-se um preço por isto. Neste caso, a solução f estará definida numa vizinhança de a que, possivelmente, não contém b . Considere, por exemplo, $[a, b] = [0, 2]$, $y_0 = 1$ e $g(y) = \sqrt{|y|^3}$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Neste caso, a única solução é dada por $f(x) = 4/(2 - x)^2$ que não está definida em $b = 2$

Perceba que na demonstração do Teorema de Peano usamos o Método de Euler de um modo muito particular supondo que as partições eram uniformes. Além disto, da seqüência de aproximações dada pelo Método de Euler, mostramos apenas que uma subsequência converge para a solução. Isto inviabiliza o Cálculo Numérico aproximado da solução pois não sabemos qual é a seqüência dos índices que deve ser usada. Felizmente, sob condições suplementares sobre g é possível mostrar que a seqüência converge (ver [11]). Este fato está intimamente ligado a questão da unicidade da solução. Reflita a respeito.

Um último comentário: apresentamos o chamado método explícito. Há também o Método de Euler Implícito que tem vantagens sobre o explícito. Na verdade existem outros métodos numéricos mais vantajosos que o de Euler. O leitor interessado poderá consultar [11].

9.8 Exercícios.

1 - Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções de A em \mathbb{R} e $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é uniformemente convergente para f se, e somente se, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2 - Seja $a \in (0, 1)$. Considere $f_n : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0, a]$.

a) Mostre diretamente, a partir da definição de convergência uniforme, que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função nula;

b) Use o Teorema de Dini para mostrar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função nula.

3 - Mostre que, na demonstração do Teorema de Arzelá-Ascoli, podemos supor, sem perda de generalidade, que

a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não tem subsequência constante;

b) se $m \neq n$, então $f_n \neq f_m$.

Conclua que isto conserta a demonstração.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C. B., *História da Matemática*, Editora Edigard Blücher Ltda, 9^a ed. (1991).
- [2] DARBOUX, J.-G., *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Ann. l'École Normale, Ser. 2 **4** (1875) 57–112.
- [3] COHEN, P.J., *The Independence of the Continuum Hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **50** (1963), 1143–1148.
- [4] DEDEKIND, R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872).
- [5] DIXMIER, J., *General Topology*, Springer-Verlag Inc., New York, 1984.
- [6] ERDÖS, P., *Über die Reihe $\sum 1/p$* , Mathematica, Zutphen B **7** (1938), 1–2.
- [7] EULER, L., *Introductio in Analysin Infinitorum*, Tomus Primis, Lausanne, 1748; Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 8.
- [8] GIRALDO, V., *Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada*, Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, 2004.
- [9] GÖDEL, J., *The Consistency of the Continuum-Hypothesis*, Princeton University Press - Princeton, N.J, 1940
- [10] HALMOS, P.R., *Naive set theory*, D. Van Nostrand Co., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, 1960.
- [11] HENRICI, P., *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1962.
- [12] HOCKING, J.G. and YOUNG, G.S., *Topology*, Dover Publications Inc., New York, 1988.
- [13] KELLEY, J.L., *General topology*, Springer-Verlag Inc., New York, 1985.
- [14] LIMA, E.L., *Curso de análise, Vol. 1*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1976.
- [15] LIMA, E.L., *Análise real, Vol. 1*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1989.

- [16] *The MacTutor History of Mathematics archive*,
<http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/>
- [17] RUDIN, W., *Princípios de análise matemática*, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1971. Tradução de *Principles of mathematical analysis.*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York-Toronto-London, 1953.
- [18] ROSA, R. M. S., A ser publicado.
- [19] VOLTERRA, V., *Sui principii del calcolo integrale*. *Giornale di Matematiche* **19** (1881), 333-372.

Índice Remissivo

- Aberto, 66
- Absurdo, demonstração por, 2
- Adição
 - de cortes, 30
 - em um corpo, 20
- Antiderivada, 124
- Arquimedes, 111
- Arzelà, 140
- Ascoli, 140
- Associatividade, 20

- Banach, 86
- Bernoulli, 25
- Bernstein, 17
- Bijeção, 8
- Bolzano, 49, 51, 54
- Boot strap*, 142
- Borel, 69
- Brouwer, 85

- Cantor, 17, 18
- Característica, 44
- Cardinalidade, 16
- Cauchy, 50, 60, 100, 143
- Classe, 3
- Cobertura aberta, 70
- Cohen, 19
- Coleção, 3
- Comensuráveis, 27
- Compacto, 69
- Complementar, 4
- Completeza, 38
- Comutatividade, 20
- Conjunto, 1
 - aberto, 66
 - compacto, 69
 - complementar, 4
 - das partes, 3
 - de índices, 9
 - de medida nula, 126
 - denso, 71, 73
 - diferença, 4
 - dos números
 - inteiros, 13
 - naturais, 13
 - racionais, 20
 - reais, 39
 - dos pontos de aderência, 67
 - dos pontos interiores, 66
 - enumerável, 15
 - fechado, 68
 - finito, 15
 - ilimitado, 22
 - inferiormente, 22
 - superiormente, 22
 - imagem, 7
 - infinito, 15
 - interseção, 3
 - limitado, 22
 - inferiormente, 22
 - superiormente, 22
 - união, 3
 - vazio, 2
- Contração, 86
- Contradomínio de uma função, 7
- Convergência
 - simples, 133
 - uniforme, 134
- Coordenada, 4
- Corpo, 21
 - arquimediano, 23
 - dos números
 - racionais, 21

- reais, 39
- ordenado, 22
 - completo, 38
- Corte, 29
 - inverso, 35
 - módulo, 33
 - oposto, 31
 - racional, 29
- Cota
 - inferior, 22
 - superior, 22
- Critério
 - da Comparação, 58
 - de Leibniz, 64
- D'Alembert, 59
- Darboux, 111
- De Morgan, 11
- Dedekind, 28
- Demonstração por absurdo, 2
- Demonstração por indução, 13
- Denso, 71, 73
- Derivada
 - da diferença, 95
 - da soma, 95
 - de uma função, 94
 - em um ponto, 94
 - do produto, 95
 - por constante, 95
 - do quociente, 95
- Desigualdade
 - de Bernoulli, 25
 - triangular, 43, 138
- Diferença
 - de seqüências, 62
- Diferença de dois conjuntos, 4
- Dini, 135
- Distributividade, 21
 - da união e da interseção, 11
- Domínio, 7
- Elemento, 1
 - de uma família, 9
 - mínimo, 13
 - neutro
 - da adição, 20
 - da multiplicação, 21
- Equações diferenciais ordinárias, 141
- Erdős, 60
- Espaço vetorial, 137
- Euclides, 28
- Eudoxo, 28, 111
- Euler, 60, 143
- Extensão, 7
- Fórmula de Taylor com resto
 - de Lagrange, 102
 - de Peano, 101
- Família, 3, 9
- Fecho, 67
- Fraenkel, 19
- Função, 6
 - afim, 91
 - antiderivada, 124
 - bijetiva, 8
 - característica, 44
 - composta, 8
 - constante, 25
 - contínua, 75, 81
 - em um ponto, 65, 81
 - crescente, 23
 - decrecente, 23
 - derivável, 94
 - em um ponto, 92
 - derivada, 94
 - diferença, 22
 - estritamente
 - crescente, 23
 - decrecente, 23
 - monótona, 23
 - exponencial, 142
 - identidade, 17
 - ilimitada, 23
 - injetiva, 8
 - integrável, 114
 - inversa, 9
 - invertível, 9
 - limitada, 23
 - inferiormente, 23

- superiormente, 23
 - Lipschitz contínua, 87
 - monótona, 23
 - Parte Inteira, 49, 60
 - primitiva, 124
 - produto, 22
 - quociente, 22
 - sobrejetiva, 8
 - soma, 22
 - uniformemente contínua, 84
- Gödel, 18
- Halmos, 5
- Hausdorff, 47
- Heine, 69
- Hilbert, 18
- Hipótese do contínuo, 18
- Homomorfismo de corpos ordenados, 37
- Imagem, 7
- de uma função, 7
 - inversa, 8
- Incomensurabilidade, 28
- Índice, 9
- Ínfimo, 40
- Infinitésimo de ordem n , 102
- Infinito, 10
- Injeção, 8
- Integral, 114, 122
- indefinida, 124
- Interior, 66
- Interseção, 3
- Intervalo, 41
- (s) encaixantes, 42
 - aberto, 41
 - degenerado, 41
 - fechado, 41
 - não degenerado, 41
- Inverso, 21
- de um corte, 35
- Lagrange, 102
- Lebesgue, 70, 129
- Leibniz, 64
- Leis de De Morgan, 11
- Lema da Contração, 87
- Limite
- da diferença, 62, 78
 - da soma, 52, 78
 - de função, 75
 - de uma série, 55
 - de uma seqüência, 47
 - em $C(K)$, 138 - do produto, 52, 78
 - por constante, 52, 78 - do quociente, 62, 78
 - inferior, 54
 - infinito
 - de função, 79
 - de seqüência, 51 - lateral, 79
 - no infinito, 79
 - superior, 54
- Método
- da Exaustão, 111
 - das Aproximações Sucessivas, 87
 - de Euler, 143
 - de Newton, 104
 - de Picard, 87
- Módulo
- de um corte, 33
 - de um número real, 43
- Malha, 143
- Medida nula, 126
- Membro, 3
- de uma família, 9
- Multiplicação
- de cortes, 33
 - em um corpo, 20
- \mathbb{N} , 13
- n -uplas ordenadas, 4
- Número
- de elementos, 15
 - inteiro, 13
 - irracional, 40
 - natural, 13
 - racional, 19

- real, 39
- Newton, 104
- Norma, 138
 - C^0 , 138
 - da convergência uniforme, 138, 139
 - do sup, 138
 - infinito, 138
 - L^∞ , 138
- Oposto, 20
 - de um corte, 31
- Ordem, 22
- Par ordenado, 4
- Paradoxo de Russel, 5
- Partição, 111
- Peano, 101, 141
- Picard, 87
- Pitágoras, 27
- Polinômio de Taylor, 101
- Ponto
 - de acumulação, 69
 - de aderência, 67
 - de extremo, 84
 - global, 84
 - local, 97
 - de máximo, 84
 - global, 84
 - local, 97
 - de mínimo, 84
 - global, 84
 - local, 97
 - fixo, 85, 86
 - interior, 66
 - isolado, 69
- Pré-imagem, 8
- Primitiva, 124
- Princípio
 - da Boa Ordem, 13, 14
 - da Indução, 13, 14
- Problema
 - de Cauchy, 143
 - de Valor Inicial, 143
- Produto
 - cartesiano, 4
 - de cortes, 33
 - de seqüências, 52
 - em um corpo, 20
- Progressão
 - Aritmética, 45
 - Geométrica, 53
- \mathbb{Q} , 20
- \mathbb{R} , 39
- Raiz
 - de dois, 40
 - m -ésima, 62, 89
- Regra
 - da Cadeia, 95
 - de l'Hospital, 105, 106
- Restrição, 7
- Reta tangente, 94
- Reunião, 3
- Riemann, 111, 114
- Rolle, 99
- Série, 55
 - absolutamente convergente, 55
 - convergente, 55
 - divergente, 55
 - Geométrica, 56
 - Harmônica, 57
- Schöreder, 17
- Seqüência, 9, 45
 - constante, 45
 - convergente, 46, 47
 - em $C(K)$, 138
 - crescente, 45
 - das somas, 52
 - das somas parciais, 55
 - de Cauchy, 50
 - decrecente, 45
 - divergente, 47
 - dos inversos, 52
 - dos produtos, 52
 - por constante, 52
 - dos quocientes, 62
 - limitada, 45
 - monótona, 45

- Soma
 - de cortes, 30
 - de seqüências, 52
 - em um corpo, 20
 - inferior, 112
 - superior, 112
- Subconjunto, 1
 - próprio, 2
- Subseqüência, 46
- Supremo, 38, 39

- Taylor, 101, 102
- Teorema
 - da Contração, 87
 - de Arzelá-Ascoli, 140
 - de Bolzano-Weierstrass, 49, 51, 54
 - de Cantor-Bernstein-Schröder, 17
 - de Cauchy, 100
 - de Dini, 135
 - de Heine-Borel, 69
 - de Lebesgue, 129
 - de Peano, 141
 - de Pitágoras, 27
 - de Rolle, 99
 - do Ponto Fixo
 - de Banach, 86
 - de Brouwer, 85
 - do Sanduíche, 62, 87
 - do Valor Intermediário, 82
 - do Valor Médio, 98
 - dos Extremos Locais, 97
 - dos Intervalos Encaixantes, 42
- Fundamental
 - da Álgebra, 108
 - da Aritmética, 18
 - do Cálculo, 122, 123
- Termo geral
 - de uma série, 55
 - de uma seqüência, 45
- Teste
 - da Raiz, 60
 - da Razão, 59
 - de Cauchy, 60
 - de d'Alembert, 59
- Topologia, 66
- Tripla ordenada, 4

- União, 3

- Valor
 - de aderência, 54
 - máximo, 84
 - mínimo, 84
- Vizinhança, 66
- Volterra, 123

- Weierstrass, 49, 51, 54

- \mathbb{Z} , 13
- Zermelo, 19
- Zero, 20