Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 8 de Exercícios - Séries numéricas

1. (a) Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

   (b) Use o item anterior para mostrar que $1 < \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$

2. Dadas a s séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, com $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1}$ e $b_n = \log(1 + \frac{1}{n})$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Calcule explicitamente as somas parciais s_n e t_n, respectivamente, dessas séries e mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, logo, as séries dadas são divergentes.

3. Analisar a convergência das séries a seguir e determinar a sua soma.

   (a)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

4. Para todo $p \in \mathbb{N}$ fixado, prove que a série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$$
converge.

5. **(Sel. Mestrado UFSM 2011/1)**

   (a) Considere duas sequências de números reais não-negativos (a_n) e (b_n) tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$ para algum $c > 0$. Mostre que $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

   (b) Use o resultado anterior para estudar a convergência das séries $\displaystyle\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ e $\displaystyle\sum \frac{1}{2^n-1}$.

6. Verificar se as séries a seguir são convergentes ou divergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n+2}{5n^3+3n}$

7. Se $\sum a_n$ converge e $a_n > 0$, $\forall n$, mostre que as séries $\sum (a_n)^2$ e $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ também convergem.

8. Prove que, para todo $a \in \mathbb{R}$, a série $a^2 + \dfrac{a^2}{1+a^2} + \dfrac{a^2}{(1+a^2)^2} + \cdots$ é convergente e calcule a sua soma.

9. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

10. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge. Sugestão: utilize o segundo limite notável: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

11. Seja $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^n n!}{n^n}$, onde k é uma constante. Prove que s converge absolutamente se $|k| < e$ e diverge se $|k| > e$.

12. Sejam $a_n > 0$, para todo n, com $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Prove que $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n = 0.$