Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 7 de Exercícios

1. Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Prove as seguintes afirmações:

   (a) Se $u \geq 0$ e $v \geq 0$, então $uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$.

   (b) Se f e g são Riemann integráveis em $[a,b]$ com $f,g \geq 0$, e $\int_a^b f^p dx = 1 = \int_a^b g^q dx$, então
   $$\int_a^b fg\,dx \leq 1.$$

   (c) Se f e g são Riemann integráveis em $[a,b]$, então
   $$\left|\int_a^b fg\,dx\right| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   Tal desigualdade é chamada de *Desigualdade de Hölder* para integrais. Quando $p=q=2$ é chamada de Desigualdades de Cauchy-Schwarz.

   (d) Suponha que f' é integrável em $[0,1]$ e $f(0)=0$. Prove que para todo $x \in [0,1]$ temos
   $$|f(x)| \leq \sqrt{\int_0^1 |f'(t)|^2 dt}.$$

2. Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monótona, derivável com f' integrável e $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Mostre que $\exists\, c \in [a,b]$ tal que
   $$\int_a^b fg = f(a)\int_a^c g + f(b)\int_c^b g.$$

3. **(Função Beta de Euler)** Mostre que
   $$B(m,n) := \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!},\ \forall m,n \in \mathbb{N}.$$
   Dica: Use integração por partes repetidamente, primeiramente notando que $B(m,n)=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1)$.

4. Mostre que a fórmula de Taylor com resto integral pode ser escrita como: seja f uma função $n+1$ vezes derivável em um aberto I com $f^{(n+1)}$ integrável em todo subintervalo de I. Seja $a \in I$. Então, dado $x \in I$,
   $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$
   onde
   $$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$
   Em seguida, mostre que se $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ para todo t entre a e x, então o resto integral $R_n(x)$ satisfaz a desigualdade
   $$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

5. Se $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, mostre que $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + r(x)$, onde $|r(x)| \leq \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

6. Seja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função com derivada segunda contínua e tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$. Mostre que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
(Sugestão: Utilize a fórmula de Taylor com resto integral para avaliar).

7. Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ e $c_1 < c_2$. Em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ destaque um ponto x_i qualquer, determinando assim uma partição pontilhada P^* pelos x_i. Se u pertence ao subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ e $c_1 \leq x_i \leq c_2$, mostre que

$$c_1 - ||P|| \leq u \leq c_2 + ||P||.$$

8. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Para toda partição $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ de $[a, b]$ sejam $P^* = (P; \xi)$ e $P^\# = (P, \eta)$ pontilhamentos de P. Prove que

$$\lim_{||P||\to 0} \sum f(\xi_i)g(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$