Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Física e Bacharelado em Física
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 05 de Exercícios

1. Sabendo que $1-\cos^2 x \leq f(x) \leq x^2$, para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ache $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Use o Teorema do Sanduíche para provar que $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$.

3. Esboce o gráfico de $f(x) = 1-x^2$, $g(x) = \cos x$ e $y = h(x)$, onde h é uma função qualquer que satisfaz
$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$
para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. O que pode-se dizer sobre o limite de $h(x)$ quando x tende para zero? Explique o seu raciocínio.

4. Prove que $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8x+3}{2x-1} = 4$.

5. Prove que $\lim\limits_{x\to +\infty} \tanh x = 1$ e que $\lim\limits_{x\to -\infty} \tanh x = -1$.

6. Com auxílio de limites infinitos, laterais e no infinito, esboce o gráfico de
$$f(x) = \left|\left|\frac{x^2}{1-x^2}\right| - 1\right| - 1,$$
indicando domínio e imagem.

7. Calcule os limites, se existirem[1]:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x}{\operatorname{sen} x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\sec x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^4 x}{4x^4}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos x - x^4}{x\tan x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\csc x}$ (f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$

(g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{1-2x-3x^2}{5x-3x^2}\right)^{x+2}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1-2x-3x^2}{x+1}\right)^{\frac{x+2}{x^2-x}}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0} (\sec x - \operatorname{sen} x)^{\frac{2}{x}}$

(j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}\ln(\sec(x^2-1))$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{ax^2+bx}\ln(1+c\cdot \operatorname{arcsen} x)$

8. Verifique se cada função abaixo é contínua ou não em cada ponto indicado:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x < 2 \\ x^2-3x+6, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ no ponto $x = 2$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ no ponto $x = 3$.

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 2x}{x^2}, & \text{se } x < 0 \\ x+2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ no ponto $x = 0$.

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x^2-5x}, & \text{se } x \neq 5 \\ 4, & \text{se } x = 5 \end{cases}$ no ponto $x = 5$.

[1] Respostas:
(a) 3 (b) -1 (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{4}$ (e) 0 (f) $\cos a$ (g) $e^{\frac{7}{3}}$ (h) e^6 (i) e^{-2} (j) 2 (k) $\frac{c}{b}$

9. (a) Usando o Exercício 2 da Lista 04, prove que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x} = 1.$$

Este limite pode ser chamado de *limite hiperbólico fundamental.*

(b) Usando o limite provado em (a), verifique se a função real f dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cosh x - 1}{3x^2}, & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2-3x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$.

10. Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ tal que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x < 3 \\ mx + 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 3$.

11. Mostre que a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$.