Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática
Primeira Prova de Análise II
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 11/10/2016.

Questão 01. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $a \in I$. Mostre que f é derivável em a, com derivada L, se, e somente se, existir uma função $\eta_f : I \to \mathbb{R}$ tal que $\eta_f(a) = 0$, η_f é contínua em a, e

$$f(x) = f(a) + (x - a)(L + \eta_f(x)),\ \forall x \in I.$$

Questão 02. Resolva os itens a seguir (eles são independentes)

(a) Se $r > 0$, prove que $\ln y - \ln x \leq \dfrac{y - x}{r}$, sempre que $r \leq x \leq y$.

(b) Se f for uma função derivável em um intervalo aberto I contendo 0, tal que $f(0) = 0$, prove que existe um c entre 0 e x tal que

$$f(x) = \frac{f'(c)}{c^{n-1}}\frac{x^n}{n}.$$ (Sugestão: utilize o Teorema do Valor Médio de Cauchy).

Questão 03. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa definida em um intervalo I. Dados $x_1, ..., x_n \in I$ e $a_1, ..., a_n > 0$, mostre que

$$f\left(\frac{a_1x_1 + ... + a_nx_n}{a_1 + ... + a_n}\right) \leq \frac{a_1f(x_1) + ... + a_nf(x_n)}{a_1 + ... + a_n}.$$

Questão 04. Suponha $f \in C^2(0, \infty)$ e escreva

$$M_0 = \sup_{x\in(0,\infty)} |f(x)|,\ M_1 = \sup_{x\in(0,\infty)} |f'(x)|,\ \text{ e }\ M_2 = \sup_{x\in(0,\infty)} |f''(x)|.$$

(a) Use a Fórmula de Taylor em torno de qualquer x fixado para mostrar que para todo $h \in (0, \infty)$, tem-se

$$|f'(x)| \leq h \cdot M_2 + \frac{M_0}{h}.$$

(b) Encontre o valor de h que minimiza a parte direita da desigualdade acima. Em seguida, conclua que

$$M_1^2 \leq 4 \cdot M_0 \cdot M_2.$$

Questão 05. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função.

(a) Prove que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for integrável, então f^2 também o é.
(Sugestão: se $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, mostre que $|f^2(x) - f^2(y)| \leq 2M|f(x) - f(y)|$, para todo $x, y \in [a, b]$. Use isso para obter uma estimativa para $S(f^2; P) - s(f^2; P)$ ou para $\sum_{i=1}^{n} \omega(f^2, [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1})$, para uma partição P dada.)

(b) Exiba um exemplo para justificar que o fato de f^2 ser integrável não implique em f ser integrável.

Questão 06. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $g(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$. Prove que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$