Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Licenciatura em Física e Bacharelado em Física
Primeira Prova de Cálculo 1
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 18/10/2016.

"No início, faça o impressindível, depois o possível, e de repente estará fazendo o impossível."
São Francisco de Assis

Questão 01. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dada por $f(x) = \dfrac{2x-2}{2-x}$.

(a) Mostre que f é inversível e obtenha a inversa f^{-1}.

(b) Com ajuda de limites, esboce os gráfico de f, indicando as assíntotas horizontais e verticais, caso existam.

(c) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais $|f(x)| \leq 3$.

Questão 02.

(a) Represente $x = \operatorname{arccoth} y$ em termos de logaritmos.

(b) Com a representação obtida em (a), calcule o limite $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{2y+1} \operatorname{arccoth} 2y$.

Questão 03. Admitindo que $1 - x^2 \leq \cosh x \leq 1 + x^2$, para todo $x \in (-1, 1)$, calcule

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh x - 1}{x}.$$

Questão 04. Calcule cada limite a seguir, se existir:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{2x+2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-2x^3+x^4}{2x^3-4x^4-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{1-2x}}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x^2}{1+x^2}}{1-\cos x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1-2x}{x^2-2x}$

Questão 05. Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ para que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x^3-x}, & \text{se} \quad x < 1 \\ 2mx - 1, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 1$.

Questão 06.

(a) Usando que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, com $a > 0$, mostre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x} = 1$.

(b) Usando (a), calcule o limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cosh x} - 1}{x \cdot \tan x}$.

Questão 07. Defina $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Em seguida, usando essa definição, prove que

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sech} x = 0.$$

(Sugestão: use o fato de que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$, e daí $e^x + e^{-x} > x$).