Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática
Primeira Prova de Análise II
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Gabarito** **Data:** 11/10/2016.

Questão 01. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $a \in I$. Mostre que f é derivável em a, com derivada L, se, e somente se, existir uma função $\eta_f : I \to \mathbb{R}$ tal que $\eta_f(a) = 0$, η_f é contínua em a, e

$$f(x) = f(a) + (x-a)(L + \eta_f(x)), \ \forall x \in I.$$

Solução. Suponha que $\exists\, f'(a) = L$, $a \in I$. Assim, segue que para $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in I$, pondo

$$f(a+h) = f(a) + L \cdot h + r(h), \tag{1}$$

segue que

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Escreva $x = a + h$, e disso $h = x - a$. Assim, (1) fica

$$f(x) = f(a) + L \cdot (x-a) + r(x-a), \tag{2}$$

e é tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x-a)}{x-a} = 0.$$

Defina $\eta_f : I \to \mathbb{R}$ por

$$\eta_f(x) = \begin{cases} \frac{r(x-a)}{x-a} & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}.$$

Afirmamos que η_f é contínua em a. De fato, basta usar o limite acima e notar que

$$\lim_{x \to a} \eta_f(x) = \lim_{x \to a} \frac{r(x-a)}{x-a} = 0 = \eta_f(a).$$

Dessa forma, a igualdade (2) pode ser reescrita como

$$f(x) = f(a) + L \cdot (x-a) + r(x-a) \cdot \frac{(x-a)}{(x-a)} = f(a) + L \cdot (x-a) + \eta_f(x) \cdot (x-a) =$$

$$= f(a) + (x-a) \cdot (L + \eta_f(x)),$$

como desejávamos.

Reciprocamente, suponha que $\exists \eta_f : I \to \mathbb{R}$ tal que $\eta_f(a) = 0$, com η_f contínua em a, e

$$f(x) = f(a) + (x-a)(L + \eta_f(x)), \ \forall x \in I.$$

Então

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L + \eta_f(x),$$

e passando o limite quando $x \to a$, obtemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} (L + \eta_f(x)) = L + \eta_f(a) = L + 0 = L.$$

Logo, temos que

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L := f'(a),$$

como queríamos mostrar.

Questão 02. Resolva os itens a seguir (eles são independentes)

(a) Se $r > 0$, prove que $\ln y - \ln x \leq \dfrac{y - x}{r}$, sempre que $r \leq x \leq y$.

(b) Se f for uma função derivável em um intervalo aberto I contendo 0, tal que $f(0) = 0$, prove que existe um c entre 0 e x tal que

$$f(x) = \frac{f'(c)}{c^{n-1}} \frac{x^n}{n}.$$ (Sugestão: utilize o Teorema do Valor Médio de Cauchy).

Solução.
(a) Defina $f : [x, y] \to \mathbb{R}$ por $f(t) = \ln t$, onde $0 < x \leq y$.

Logo, f é contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y), com $f'(t) = \frac{1}{t}$. Assim, pelo T.V.M segue que $\exists$ c entre x e y tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = \frac{1}{c}(y - x),$$

ou seja,

$$\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y - x),$$

onde $r \leq x < c < y$, e daí $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{r}$, e com isso segue que

$$\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y - x) \leq \frac{1}{r}(y - x).$$

(b) Seja $x \in I$ tal que $x > 0$ e considere a restrição $f : [0, x] \to \mathbb{R}$, que é tal que $f(0) = 0$ (se considerar $x < 0$, basta trabalhar no intervalo $[x, 0]$, e a prova será idêntica). Defina também a função $g : [0, x] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^n$.

Logo, f e g são contínuas em $[0, x]$ e deriváveis em $(0, x)$, e daí, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy segue que existe c entre 0 e x tal que

$$[f(x) - f(0)] \cdot g'(c) = [g(x) - g(0)] \cdot f'(c),$$

e como $f(0) = 0$, $g'(x) = nx^{n-1}$, temos

$$f(x) \cdot n \cdot c^{n-1} = (x^n - 0) \cdot f'(c) \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{x^n\, f'(c)}{n\, c^{n-1}}.$$

Questão 03. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa definida em um intervalo I. Dados $x_1, ..., x_n \in I$ e $a_1, ..., a_n > 0$, mostre que

$$f\left(\frac{a_1 x_1 + ... + a_n x_n}{a_1 + ... + a_n}\right) \leq \frac{a_1 f(x_1) + ... + a_n f(x_n)}{a_1 + ... + a_n}.$$

Solução. Basta denotar

$$\lambda_i = \frac{a_i}{a_1 + ... + a_n}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

e daí $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, e sendo f convexa, segue que

$$f\left(\frac{a_1x_1 + ... + a_nx_n}{a_1 + ... + a_n}\right) = f\left(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n\right) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n) =$$

$$= \frac{a_1}{a_1 + ... + a_n} f(x_1) + ... + \frac{a_n}{a_1 + ... + a_n} f(x_n) = \frac{a_1 f(x_1) + ... + a_n f(x_n)}{a_1 + ... + a_n}.$$

Questão 04. Suponha $f \in C^2(0, \infty)$ e escreva

$$M_0 = \sup_{x\in(0,\infty)} |f(x)|, \quad M_1 = \sup_{x\in(0,\infty)} |f'(x)|, \quad \text{e} \quad M_2 = \sup_{x\in(0,\infty)} |f''(x)|.$$

(a) Use a Fórmula de Taylor em torno de qualquer x fixado para mostrar que para todo $h \in (0, \infty)$, tem-se

$$|f'(x)| \leq h \cdot M_2 + \frac{M_0}{h}.$$

(b) Encontre o valor de h que minimiza a parte direita da desigualdade acima. Em seguida, conclua que

$$M_1^2 \leq 4 \cdot M_0 \cdot M_2.$$

Solução.
(a) Dado $h > 0$, desenvolvendo a Fórmula de Taylor com o resto de Lagrange em $x \in (0, \infty)$ como abaixo, obtemos

$$f(x + 2h) = f(x) + f'(x) \cdot 2h + \frac{f''(c)}{2!}(2h)^2,$$

onde c entre x e $x + 2h$. Logo,

$$2f'(x)h = f(x + 2h) - f(x) - \frac{f''(c)}{2} \cdot 4h^2.$$

Logo, isolando $f'(x)$ e passando o módulo, vamos obter

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x + 2h)| + |f(x)|}{2h} + |f''(c)| \cdot h \leq \frac{M_0}{h} + M_2 \cdot h.$$

(b) Defina $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $g(t) = \frac{M_0}{t} + M_2 \cdot t$. Examinemos os pontos críticos de g: temos que

$$g'(t) = -\frac{M_0}{t^2} + M_2,$$

temos que $\nexists g'(t)$ se, e somente se $t = 0$, mas este caso de ponto crítico g não está definida. Logo, basta verificar onde $g'(t) = 0$:

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow = -\frac{M_0}{t^2} + M_2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{M_2}},$$

e como $g''(t) = \frac{M_0}{t^3} > 0 \ \forall t \in (0, \infty)$, segue que g assume um mínimo em $t = \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{M_2}}$. Assim, o h que minimiza a desigualdade do item (a) é dado por $h = \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{M_2}}$. Nesse caso, teremos

$$|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{M_2}} \cdot M_2 + M_0 \cdot \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_0}} = \frac{2M_0 \cdot M_2}{\sqrt{M_0} \cdot \sqrt{M_2}},$$

e elevanso ao quadrado, vamos obter

$$|f'(x)| \leq 4M_0 \cdot M_2,$$

e como tal desigualdade vale para todo $x \in (0, \infty)$, em particular vale para o x que produz o supremo na parte esquerda da desigualdade acima, ou seja, segue que

$$M_1^2 \leq 4M_0 \cdot M_2.$$

Questão 05. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função.

(a) Prove que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for integrável, então f^2 também o é.
(Sugestão: se $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, mostre que $|f^2(x) - f^2(y)| \leq 2M|f(x) - f(y)|$, para todo $x, y \in [a, b]$. Use isso para obter uma estimativa para $S(f^2; P) - s(f^2; P)$ ou para $\sum_{i=1}^{n} \omega(f^2, [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1})$, para uma partição P dada.)

(b) Exiba um exemplo para justificar que o fato de f^2 ser integrável não implique em f ser integrável.

Solução.
(a) Sendo f integrável temos que f é limitada em $[a, b]$, e portanto existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a, b].$$

Pela integrabilidade de f segue que, dado $\varepsilon > 0$, existe $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ partição de $[a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Para $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, temos que

$$|f^2(x) - f^2(y)| = |(f(x) + f(y))(f(x) - f(y))| \leq (|f(x)| + |f(y)|)|f(x) - f(y)| \leq$$

$$\leq 2M|f(x) - f(y)| \leq 2M \left| \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) - \inf_{y \in [t_{i-1}, t_i]} f(y) \right| = 2M\omega(f; [t_{i-1}, t_i]),$$

ou seja,

$$|f^2(x) - f^2(y)| \leq 2M\omega(f; [t_{i-1}, t_i]), \ \forall x, y \in [t_{i-1}, t_i].$$

Como tal desigualdade vale para todo x, y em $[t_{i-1}, t_i]$, valerá

$$\left| \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f^2(x) - \inf_{y \in [t_{i-1}, t_i]} f^2(y) \right| \leq 2M\omega(f; [t_{i-1}, t_i]),$$

ou seja,

$$\omega(f^2; [t_{i-1}, t_i]) \leq 2M\omega(f; [t_{i-1}, t_i]).$$

Multiplicando por $(t_i - t_{i-1}) > 0$ e somando para cada $i = 1, 2, ..., n$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f^2; [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}) \leq 2M \sum_{i=1}^{n} \omega(f; [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}) < 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Logo, pelo Critério de Darboux, f^2 também é integrável.

(b) Basta considerar $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Neste caso, para qualquer partição P de $[0,1]$ dada, o ínfimo de f será -1 e o supremo de f será 1, em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P. Logo,

$$\underline{\int_0^1} f = -1 \quad \text{e} \quad \overline{\int_0^1} f = 1.$$

Portanto, não existe $\int_0^1 f$.

No entanto, $f^2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ será $f^2(x) = 1$ e daí

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 1\, dx = 1.$$

Questão 06. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $g(x) > 0$, para todo $x \in [a,b]$. Prove que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Solução. Sendo $f$contínua em $[a,b]$, segue pelo Teorema do valor Extremo que f assume valor máximo e assume valor mínimo em $[a,b]$. Assim, sejam M e m, respectivamente, tais valores. Temos, portanto, que

$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [a,b].$$

Sendo $g(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$, temos que

$$m\, g(x) \leq f(x)g(x) \leq M\, g(x).$$

Integrando em $[a,b]$, obtemos

$$\int_a^b m\, g(x) \leq \int_a^b f(x)g(x) \leq \int_a^b M\, g(x),$$

ou seja,

$$m \int_a^b g(x) \leq \int_a^b f(x)g(x) \leq M \int_a^b g(x),$$

e como $g(x) > 0$, $\forall x$, segue que $\int_a^b g > 0$ e daí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)} \leq M.$$

Como f é contínua, segue que existem $x_0, x_1 \in [a,b]$ tais que $m = f(x_0)$ e $M = f(x_1)$, e com isso, obtemos

$$f(x_0) \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)} \leq f(x_1),$$

e, pela continuidade de f, considerando $d = \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)}$, segue pelo Teorema do Valor Intermediário que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = d$, ou seja,

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)},$$

donde segue o resultado.