Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 5 de Exercícios - Algumas respostas

1. Dê um exemplo de uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ que não seja integrável, mas seja *módulo-integrável* (i.e., $|f|$ é integrável).

   Solução. Por exemplo, uma variante da função de Dirichlet, como
   $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases}1, & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ -1, & \text{se } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$
   É fácil ver que $\underline{\int_0^1} f=-1$ e $\overline{\int_0^1} f=1$ e, portanto, f não é integrável. Porém, repare que $|f(x)|=1$, $\forall x\in[0,1]$, logo, se verifica facilmente que $|f|$ é integrável, com $\int_0^1|f|=1$ (complete os detalhes deste esboço da solução).

2. Se $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ é limitada e f^2 é integrável em $[0,1]$, então f é integrável em $[0,1]$? Justifique.

3. **(Sel. Mestr. UFRGS 2004/2)** Considerando uma partição conveniente do intervalo $[0,2]$ e utilizando a definição de integral, obtenha as estimativas

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\leq\int_0^2\sqrt{x^4+2}\,dx\leq 3\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

   Solução. Tome a partição regular $P=\{0,1,2\}$ (ou seja, $t_0=0, t_1=1$ e $t_2=2$) e considere a função $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sqrt{x^4+2}$.

   Como $f'(x)=\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+2}}\geq 0$ para todo $x\in[0,2]$, segue que f é crescente em $[0,2]$, e daí o supremo de f em cada subintervalo $[t_{i-1},t_i]$, $i=1,2$ coincide com $f(t_i)$ e o ínfimo coincide com $f(t_{i-1})$, calculando as somas inferior e superior para f em relação à partição P dada, obtemos, respectivamente,

$$s(f;P)=\sum_{i=1}^{2}\inf_{x\in[t_{i-1},t_i]}f(x)\cdot(t_i-t_{i-1})=\sqrt{0^4+2}\cdot 1+\sqrt{1^4+2}\cdot 1=\sqrt{2}+\sqrt{3},$$

   e

$$S(f;P)=\sum_{i=1}^{2}\sup_{x\in[t_{i-1},t_i]}f(x)\cdot(t_i-t_{i-1})=\sqrt{1^4+2}\cdot 1+\sqrt{2^4+2}\cdot 1=\sqrt{3}+3\sqrt{2}.$$

   Como

$$s(f;P)\leq\int_0^2 f\leq S(f;P),$$

   segue o resultado.

4. Use a fórmula

$$\operatorname{sen}h+\operatorname{sen}2h+\operatorname{sen}3h+\ldots+\operatorname{sen}mh=\frac{\cos\frac{h}{2}-\cos\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)h\right)}{2\operatorname{sen}\frac{h}{2}}$$

   para determinar a área sob a curva $y=\operatorname{sen}x$ de $x=0$ até $x=\frac{\pi}{2}$. Faça de duas etapas:

   (a) Divida o intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$ em n subintervalos de igual comprimento (partição regular P) e calcule a correspondente soma superior.

   (b) Determine $\lim\limits_{n\to+\infty}S(f;P)$.

Solução. Seja $P_n = \{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, ..., \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\}$ uma partição regular do intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, onde $t_i = i \cdot \frac{\pi}{2n}$.
Como $f(x) = \sin x$ é crescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ segue que

$$M_i = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) = f(t_i) = \sin t_i.$$

Note também que cada subintervalo tem comprimento $t_i - t_{i-1} = \dfrac{\pi}{2n}$.
Montando a soma superior de f em relação à partição regular P_n, temos

$$S(f;P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sin t_i \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n} \sin t_i =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\frac{\cos\dfrac{t_1}{2} - \cos\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t_1\right]}{2\sin\dfrac{t_1}{2}} = \frac{\pi}{2n}\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n} - \cos\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}} =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}}.$$

Isto responde o item (a), ou seja,

$$S(f;P_n) = \frac{\pi}{2n}\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}}.$$

Para responder o item (b), basta passar o limite com n tendendo para $+\infty$. Convém lembrar que usaremos o seguinte limite notável

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

nos cálculos seguintes. Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} S(f;P_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n}\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}} = \lim_{n\to+\infty} 2\cdot\frac{\pi}{4n}\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4n}\right)}{2} = 2\cdot\frac{\cos 0 - \cos\dfrac{\pi}{2}}{2} = 2\cdot\frac{1+0}{2} = 1.$$

5. **(Sel. Mestr. UFRGS 2007/1)**

   (a) Usando somas de Riemann, obtenha

$$\int_0^1 x^2dx \qquad \text{(note que } 1+4+...+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\text{)}$$

   (b) Seja $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x\in\mathbb{Q} \\ 2+\cos x & \text{se } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

   Mostre que f não é integrável.

6. Se f é integrável e m e M são tais que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$ (i.e., f é limitada em $[a,b]$), mostre que
$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Solução. Como $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, integrando no intervalo $[a,b]$ vamos obter
$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx.$$
Como $\int_a^b c\,dx = c\int_a^b dx = c(b-a)$, onde c é uma constante real, segue o resultado.

7. Suponha que f seja uma função contínua em $[0,1]$. Mostre que
$$\int_0^1 f(x)x^2dx = \frac{1}{3}f(\xi),$$
para algum $\xi \in [0,1]$.

Solução. Como f é contínua em [0,1] temos que f assume máximo e mínimo em [0,1]. Sejam x_0, x_1 em $[0,1]$ tais que $f(x_0) = \min f$ e $f(x_1) = \max f$ em $[0,1]$. Assim,
$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \Rightarrow f(x_0)x^2 \leq f(x)x^2 \leq f(x_1)x^2.$$
Integrando em $[0,1]$, vamos obter
$$\frac{1}{3}f(x_0) \leq \int_0^1 f(x)x^2dx \leq \frac{1}{3}f(x_1),$$
ou seja,
$$f(x_0) \leq 3\int_0^1 f(x)x^2dx \leq f(x_1).$$
E, sendo f contínua em no intervalo fecghado entre x_0 e x_1, contido em $[0,1]$, segue pelo T. do valor intermediário para funções contínuas que existe c entre x_0 e x_1 tal que
$$f(c) = d = 3\int_0^1 f(x)x^2dx,$$
donde segue o resultado.

8. **(Sel. Mestr. UFRGS 2004/2)** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua não negativa. Definindo $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por
$$g(x) = \int_a^x f(s)\,ds$$
prove que b é ponto de máximo absoluto de g.

9. Se f é integrável (e então limitada) em $[a,b]$, mostre que
$$\left|\int_a^b f\right| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Solução. Usando a propriedade $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ e o fato de f ser limitada, temos
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|dx =$$
$$= \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b dx = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \cdot (b-a).$$

10. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função de Lipschitz, i.e., $\exists K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para quaisquer $x, y \in [0,1]$. Mostre que

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \right| < \frac{K}{2n}.$$

Solução. Como $\int_0^1 dx = 1$ temos, juntamente com as propriedades da integral definida:

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \right| = \left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \int_0^1 dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \left[f(x) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \right] dx \right| = \left| \frac{1}{n} \int_0^1 \left[nf(x) - \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \right] dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{n} \int_0^1 \left[f(x) - f(\frac{1}{n}) + f(x) - f(\frac{2}{n}) + ... + f(x) - f(\frac{n}{n}) \right] dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \left\{ \int_0^1 |f(x) - f(\frac{1}{n})|dx + \int_0^1 |f(x) - f(\frac{2}{n})|dx + ... + \int_0^1 |f(x) - f(\frac{n}{n})|dx \right\}$$

$$\leq \frac{1}{n} \left\{ \int_0^1 K|x - \frac{1}{n}|dx + ... + \int_0^1 K|x - \frac{n}{n}|dx \right\} =$$

$$= \frac{K}{n^2} \left\{ \int_0^1 |nx - 1|dx + ... + \int_0^1 |nx - n|dx \right\} = (\star)$$

Para cada i, notando que

$$|nx - i| = \begin{cases} nx - i, & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{i}{n} \\ i - nx, & \text{se} \quad \frac{i}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

temos

$$\int_0^1 |nx - i|dx = \int_0^{\frac{i}{n}} (nx - i)dx + \int_{\frac{i}{n}}^1 (i - nx)dx,$$

iremos encontrar o valor de cada integral, que somadas[1], para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, achamos

$$i - \frac{n}{2} - \frac{i^2}{n},$$

portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 |nx - i|dx = \sum_{i=1}^{n} \left[i - \frac{n}{2} - \frac{i^2}{n} \right] =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Portanto,

$$(\star) = \frac{K}{n^2}\left(\frac{n}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{K}{n}\left(\frac{1}{2} - (1 + \frac{1}{n})\frac{2n+1}{6} \right) \leq \frac{K}{2n}.$$

Isto conclui o exercício.

[1] O cálculo destas integrais deixo a encargo do estudante aventureiro.

11. Suponhamos que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ seja contínua, derivável em $(0,1)$, $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq 1$ para todo $x \in (0,1)$. Mostre que

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{2}.$$

Solução. dado $x \in (0,1)$, segue que f é contínua em $[0,x]$ e derivável em $(0,x)$. Logo, estamos nas hipóteses do T.V.M. Portanto, segue que existe $c \in (0,x)$ tal que

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x-0) \Rightarrow f(x) = f'(c) \cdot x.$$

Logo,

$$\left| \int_0^1 f(x)dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 |f'(c)| \cdot |x|dx \leq \int_0^1 x\,dx.$$

Como $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ (calcule as integrais superior e inferior e conclua), temos que

$$\left| \int_0^1 f(x)dx \right| \leq \frac{1}{2},$$

donde segue o resultado.

12. **(Sel. Mestr. UFRGS 2014/1)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz $f(x) \geq c > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Defina $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

(a) Prove que F satisfaz $F(y) - F(x) \geq c(y-x)$ para $y \geq x$.

(b) Prove que F é bijetora e, portanto, tem uma inversa $G = F^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) Mostre que a inversa de F, denotada por G, satisfaz

$$|G(w) - G(z)| \leq \frac{1}{c}|w-z|,$$

para todo $z, w \in \mathbb{R}$, isto é, G é uma função de Lipschitz.

13. **(Sel. Mestr. UFSM 2013/1)** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada integrável. Defina

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b].$$

(a) Mostre que F é contínua em $[a,b]$.

(b) Prove que se f é contínua em $x_0 \in (a,b)$ então F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

(c) Seja $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$. Mostre que g é estritamente crescente.

14. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Prove que

$$\lim_{p \to \infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = M.$$

Sugestão: Mostre que, dado $\varepsilon > 0$, existe um intervalo $[c,d] \subset [a,b]$ tal que $|f(x)| \geq M - \varepsilon$, $\forall x \in [c,d]$. Em seguida, mostre que

$$(M-\varepsilon)(d-c)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{p}}.$$

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, defina o conjunto

$$X_\varepsilon = \{x \in [a,b] : |f(x)| \geq M - \varepsilon\}.$$

Afirmamos que X_ε é um intervalo. De fato, defina $h = |f|$. Logo, h é contínua em $[a, b]$ pois f o é. Considere o intervalo aberto $(M - \varepsilon, M) \subset h([a, b])$. Como h é contínua, segue que a pré-imagem de um intervalo é um intervalo, ou seja, $h^{-1}((M - \varepsilon, M)) = (c, d) \subset [a, b]$.

Assim, temos que $(c, d) = X_\varepsilon$ pois

$$x \in (c, d) = h^{-1}((M - \varepsilon, M)) \Leftrightarrow h(x) = |f(x)| \in (M - \varepsilon, M) \Leftrightarrow |f(x)| \geq M - \varepsilon \Leftrightarrow x \in X_\varepsilon.$$

Logo,

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \geq \int_{X_\varepsilon} |f(x)|^p dx = \int_c^b |f(x)|^p dx \geq \int_c^d (M - \varepsilon)^p dx = (M - \varepsilon)^p (d - c),$$

ou seja,

$$(M - \varepsilon)^p (d - c) \leq \int_a^b |f(x)|^p dx.$$

Por outro lado,

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq \int_a^b M^p dx = M^p (b - a).$$

Ou seja, mostramos que

$$(M - \varepsilon)^p (d - c) \leq \int_a^b |f(x)|^p dx \leq M^p (b - a).$$

Elevando á potência $\frac{1}{p}$, obtemos

$$(M - \varepsilon)(d - c)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq M(b - a)^{\frac{1}{p}}.$$

Passando o limite com $p \to \infty$ segue o resultado.

15. Se $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ for uma função integrável e $c \in \mathbb{R}$, definimos g em $[a + c, b + c]$ por $g(y) = f(y - c)$. Prove que g é integrável e que $\int_{a+c}^{b+c} g = \int_a^b f$. A função g chama-se *c-translado* de f.

Solução. Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ partição de $[a, b]$ para f, e defina $g : [a + c, b + c] \to \mathbb{R}$ por

$$g(y) = f(y - c).$$

Defina $\tilde{P} = \{a + c = t_0 + c < t_1 + c < ... < t_n + c = b + c\}$ partição de g em $[a + c, b + c]$, ou seja, $\tilde{P}$ é a partição P transladada c unidades de $[a, b]$. Assim,

$$S(g; \tilde{P}) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i + c - (t_{i-1} + c)) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}),$$

onde

$$M_i = \sup_{y \in [a+c, b+c]} g(y) = \sup_{y \in [a+c, b+c]} f(y - c),$$

e como $y \in [a + c, b + c]$, segue que $a + c \leq y \leq b + c$, ou seja, $a \leq y - c \leq b$, e disso, denotando $z = y - c$, concluímos que $a \leq z \leq b$,e portanto, a igualdade acima fica

$$M_i = \sup_{y \in [a+c, b+c]} f(y - c) = \sup_{z \in [a, b]} f(z).$$

Portanto, concluímos que

$$S(g;\tilde{P}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{z\in[a,b]} f(z)(t_i - t_{i-1}) = S(f;P).$$

Analogamente concluímos que

$$s(g;\tilde{P}) = s(f;P).$$

Por fim, como f é integrável em $[a,b]$, por hipótese, segue que, dado $\varepsilon > 0$, existe Q partição de $[a,b]$ tal que

$$S(f;Q) - s(f;Q) < \varepsilon.$$

Assim, construindo a partição $\tilde{Q}$ a partir da partição Q acima estabelecida, como fizemos anteriormente, deslocando c unidades o intervalo $[a,b]$, segue que

$$S(g;\tilde{Q}) = S(f;Q) \quad \text{e} \quad s(g;\tilde{Q}) = s(f;Q),$$

donde segue que

$$S(g;\tilde{Q}) - s(g;\tilde{Q}) = S(f;Q) - s(f;Q) < \varepsilon,$$

ou seja, g é integrável em $[a+c, b+c]$, com

$$\int_{a+c}^{b+c} g = \int_a^b f.$$

16. Suponha $a > 0$ e considere $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ integrável.

    (a) Se f for par, i.e., se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [0,a]$, mostre que $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

    (b) Se f for ímpar, i.e., se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [0,a]$, mostre que $\int_{-a}^{a} f = 0$.