Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 6 de Exercícios - Teorema Fundamental do Cálculo

1. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, $\varphi : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to [a, b]$ derivável e $c \in [a, b]$. Prove que as afirmações a seguir são equivalentes:

   A. $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ para todo $t \in [a, b]$ e $\varphi(t_0) = c$.

   B. $\varphi(t) = c + \displaystyle\int_0^t f(\varphi(s))\, ds$ para todo $t \in [a, b]$.

2. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, ponha $m = \dfrac{a+b}{2}$ e prove que
$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a} \int_a^b [f(x) + (x - m)f'(x)]\, dx.$$

3. **(Sel. Mestrado UFRGS 2012/2)** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $x_0 \in (a, b)$.

   (a) Mostre que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$(f(x_0) - \varepsilon)\delta \leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(y)dy \leq (f(x_0) + \varepsilon)\delta.$$

   (b) Usando (a), prove que
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(y)dy}{h} = f(x_0).$$

4. **(Sel. Mestrado UFSM 2009/1)** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

   Sugestão. Tome uma primitiva de f e aplique o Teorema do Valor Médio.

5. **(Sel. Mestrado UFSM 2013/2)** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se $\int_x^y f(s)ds = 0$, $\forall x, y \in [a, b]$, então $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

6. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para mostrar que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e periódica de período P, i.e., se $f(x + P) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então o valor de
$$\int_x^{x+P} f(t)dt$$
   não depende de x.

7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável com f' integrável. Se $f(a) = 0$ e $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, mostre que
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2}.$$

8. (a) Integrando por partes, mostre que

$$A_n := \int_1^n \ln x dx = n \ln n - n + 1.$$

(b) Se B_n é a soma superior da função $\ln x$ relativamente à partição $\{1, 2, ..., n\}$ do intervalo $[1, n]$, mostre que

$$A_n < B_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln n!.$$

(c) Uma melhor aproximação superior para a área A_n pode ser dada considerando-se, para cada $k = 2, ..., n$ a tangente ao gráfico de $y = \ln x$ pelo ponto $x = k - \frac{1}{2}$. O trapézio com base no intervalo $[k-1, k]$ do eixo x, com dois lados verticais e lado inclinado igual a essa tangente tem área $\ln(k - \frac{1}{2})$. Seja $C_n = \sum_k = 2^n \ln(k - \frac{1}{2})$ a soma das áreas desses trapézios. Mostre que $A_n < C_n < B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. **(Sel. Mestrado UFRGS 2015/2)** Defina a função $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$\log(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

(a) Mostre que

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^b \frac{1}{t} dt \quad \text{para } a, b > 0.$$

(b) Mostre que se $x, y > 0$, então $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(c) Se $x > 0$, então para todo número racional r temos $\log(x^r) = r \log(x)$.

10. **(Sel. Mestrado UFRGS 2007/2)** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sua derivada de Lanczos, denotada por DLf, é a função real definida em cada ponto por meio do limite

$$DLf(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t f(x_0 + t) dt.$$

(a) Mostre que se f é diferenciável em x_0 então $DLf(x_0) = f'(x_0)$.

(b) Calcule a derivada de Lanczos de $f(x) = |x|$ quando $x_0 = 0$.