Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática - Diurno
Primeira Prova de Cálculo I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Gabarito** **Data:** 18/09/2015.

"Há dois labirintos do espírito humano: um respeita a composição do contínuo, o outro a natureza da liberdade; e ambos têm origem no mesmo infinito."

Leibniz

Questão 01.

(a) Represente $x = \operatorname{arcsenh} y$ em termos de logaritmos.

(b) Com a representaçao obtida em (a), calcule o limite $\lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \operatorname{arcsenh} y$.

Solução.
(a) Basta lembrar que

$$x = \operatorname{arcsenh} y \Leftrightarrow y = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x - \frac{1}{e^x},$$

e escrevendo $e^x = w$, vamos obter

$$w^2 - 2yw - 1 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} \Leftrightarrow w = y \pm \sqrt{y^2+1},$$

e disso, lembrando que $e^x > 0$, segue que

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

(b)

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \operatorname{arcsenh} y = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \cdot \ln(y + \sqrt{y^2+1}) = \lim_{y\to 0} (y + \sqrt{y^2+1})^{\frac{1}{y}} = \ln \lim_{y\to 0} (y + \sqrt{y^2+1})^{\frac{1}{y}} =$$

$$= \ln \lim_{y\to 0} (1 + y - 1 + \sqrt{y^2+1})^{\frac{1}{y}} = \ln \left[\lim_{y\to 0} (1 + y - 1 + \sqrt{y^2+1})^{\frac{1}{y-1+\sqrt{y^2+1}}} \right]^{\frac{y-1+\sqrt{y^2+1}}{1} \cdot \frac{1}{y}} =$$

$$= \ln e^{\lim_{y\to 0} \frac{y-1+\sqrt{y^2+1}}{y}} = \lim_{y\to 0} \frac{y-1+\sqrt{y^2+1}}{y} \cdot \frac{y-1-\sqrt{y^2+1}}{y-1-\sqrt{y^2+1}} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y^2 - 2y + 1 - y^2 - 1}{y(y-1-\sqrt{y^2+1})} = \lim_{y\to 0} \frac{-2y}{y(y-1-\sqrt{y^2+1})} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Questão 02. Admitindo que $\cos x \leq \operatorname{sech} x \leq 2x^2 + 1$, para todo $x \in (-1, 1)$, calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sech} x - 1}{x}.$$

Solução. Primeiramente, se $x > 0$, podemos subtrair 1 de toda a cadeia de desigualdades e em seguida dividir toda a cadeia de desigualdades por x e disso, obtemos

$$\frac{\cos x - 1}{x} \leq \frac{\operatorname{sech} x - 1}{x} \leq 2x.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{(-\operatorname{sen} x)}{1+\cos x} = 0,$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} 2x = 0,$$

segue pelo Teorema do Sanduíche que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sech} x - 1}{x} = 0. \tag{1}$$

Agora, se $x < 0$, de raciocínios análogos aos efetuados acima vamos obter

$$2x \leq \frac{\operatorname{sech} x - 1}{x} \leq \frac{\cos x - 1}{x},$$

o que, analogamente, se mostra pelo T. do Sanduíche que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sech} x - 1}{x} = 0, \tag{2}$$

e portanto, por (1) e (2) concluímos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sech} x - 1}{x} = 0.$$

Questão 03. Usando a definição de limite, prove que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{1}{3}$.

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ $(0 < \delta < 3)$ tal que, $\forall x$, tal que $0 < |x-1| < \delta$, implique em $\left|\frac{x}{x+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$. Vamos avaliar tal diferença:

$$\left|\frac{x}{x+2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3x - x - 2}{3(x+2)}\right| = \frac{2|x-1|}{3|x+2|} < \frac{2\delta}{3|x+2|}.$$

Como $|x+2| = |3 + (x-1)| \geq 3 - |x-1| > 3 - \delta$, segue que $\dfrac{1}{|x-2|} < \dfrac{1}{3-\delta}$ e assim, obtemos a majoração:

$$\left|\frac{x}{x+2} - \frac{1}{3}\right| < \frac{2\delta}{3|x+2|} < \frac{2\delta}{3(3-\delta)}.$$

Escrevendo $\varepsilon = \frac{2\delta}{3(3-\delta)}$, isolando δ vamos obter $\delta = \frac{9\varepsilon}{2+3\varepsilon}$, como desejado. Isso prova o limite solicitado.

Questão 04. Calcule cada limite a seguir, se existir:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1 - 3x^2 + 4x^3}{2x^3 - x^4 - 2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1 - 4x + x^2}{x^2 + 2x}\right)^{\frac{2-x^2-5x}{3x-1}}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{3x^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x}{x^2 - 9}$

Solução.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-3)}=\frac{1}{1}=1.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{4}.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-3x^2+4x^3}{2x^3-x^4-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{-x^4}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{4}{x}=0.$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-4x+x^2}{x^2+2x}\right)^{\frac{2-x^2-5x}{3x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1-4x+x^2}{x^2+2x}-1\right)^{\frac{2-x^2-5x}{3x-1}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1-4x+x^2-x^2-2x}{x^2+2x}\right)^{\frac{2-x^2-5x}{3x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1-6x}{x^2+2x}\right)^{\frac{2-x^2-5x}{3x-1}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1-6x}{x^2+2x}\right)^{\frac{x^2+2x}{1-6x}}\right]^{\frac{1-6x}{x^2+2x}\cdot\frac{2-x^2-5x}{3x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^3}{3x^3}}=e^2.$$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{3x^2}\cdot\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2(1+\sqrt{\cos x})}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{3(1+\cos x)}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{3\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{12}.$$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{x}{x^2-9}=\frac{3}{0^-}=-\infty.$

Questão 05. Sejam f e g funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ e g é uma função limitada.

(a) Prove que $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0$.

(b) Usando o resultado de (a), mostre que que

$$\lim_{x\to 1}|x-1|\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.$$

(c) Afirmamos que se g não for limitada, o resultado do item (a) é falso. Justifique essa afirmativa através de um exemplo.

Solução. Primeiramente, como g é limitada, por hipótese, segue que existe $K>0$ tal que

$$|g(x)|\le K,\ \forall x\in \mathrm{D}(g).$$

(a) Como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, segue que, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, $\forall x$ tal que $0<|x-a|<\delta$, implica em $|f(x)|=|f(x)-0|<\dfrac{\varepsilon}{K}$.

Vamos avaliar $|f(x)\cdot g(x)-0|$:

$$|f(x)\cdot g(x)-0|=|f(x)|\cdot|g(x)|<\frac{\varepsilon}{K}\cdot K=\varepsilon,$$

ou seja, para $\varepsilon>0$ dado, temos que existe $\delta>0$ tal que $|f(x)\cdot g(x)|<\varepsilon$, sempre que $0<|x-a|<\delta$, ou seja, acabamos de provar que

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0.$$

(b) De fato, identificando no item (a) $f(x) = |x-1|$, $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)$, e $a = 1$, temos que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} |x-1| = |1-1| = 0$$

e como $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)$ é tal que $|g(x)| = |\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)| \leq 1$, i.e., como g é limitada, segue pelo item (a) que

$$\lim_{x\to 1} |x-1| \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0.$$

(c) Considere por exmplo $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ (que não é limitada) e $a = 0$.
Assim, temos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

mas

$$\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0.$$

Questão 06. Prove que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $M > 0$ tal que, $\forall x > M$, implique em $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Vamos encontrar uma estimativa para tal diferença:

$$\left|\frac{1}{x+1} - 0\right| = \frac{1}{|x+1|}.$$

Como $x \to +\infty$, $|x+1| = x+1 > M+1 > M$, e então

$$\frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{M+1} < \frac{1}{M},$$

e assim

$$\left|\frac{1}{x+1} - 0\right| = \frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{M}.$$

Logo, escrevendo $\varepsilon = \frac{1}{M}$ segue que $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, como desejado.

Questão 07. Determine o valor de $k \in \mathbb{R}$ para que exista o limite $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)$, onde

$$f(x) = \begin{cases} kx - 3, & \text{se} \quad x \leq -1 \\ x^2 + k, & \text{se} \quad x > -1. \end{cases}$$

Solução. Calculando os limites laterais, obtemos

- $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} kx - 3 = -k - 3.$
- $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2 + k = 1 + k.$

Como por hipótese $\exists \displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$, temos que

$$-k - 3 = 1 + k \Longrightarrow 2k = -4 \Longrightarrow k = -2.$$