RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DA LISTA 03.
PROF. MAURÍCIO ZAHN.

01) (a) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$: Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que,

$\forall x : 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$.

Vamos estimar $|x^2-4|$:

$|x^2-4| = |(x+2)\cdot(x-2)| = |x+2| \cdot |x-2|$.

Como $|x-2| < \delta$, temos

$$|x^2-4| = |x+2| \cdot \underbrace{|x-2|}_{<\delta} < \delta \cdot |x+2|$$

Agora, como

$$|x+2| = |x+2-4+4| = |(x-2)+4| \leq \underbrace{|x-2|}_{<\delta} + 4 < \delta + 4,$$

então

$$|x^2-4| < \delta \cdot |x+2| \leq \underbrace{\delta \cdot (\delta+4)}_{:= \varepsilon}$$

Assim, considerando $\varepsilon = \delta(\delta+4) = \delta^2 + 4\delta$, isolando δ, obtemos:

$$\varepsilon = \delta^2 + 4\delta = \delta^2 + 4\delta + 4 - 4$$

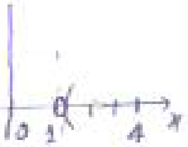
$$\Rightarrow \varepsilon + 4 = (\delta+2)^2 \Rightarrow \delta + 2 = \sqrt{\varepsilon+4}$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon+4} - 2 > 0$$

Assim, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $(\delta = \sqrt{\varepsilon+4} - 2)$ tal que, $\forall x : 0 < |x-2| < \delta$, implica em $|f(x) - 4| < \varepsilon$, ou seja, mostramos que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

$\square$



(b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{3}$.

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que,

$\forall x : 0 < |x-4| < \delta \implies |f(x) - \frac{1}{3}| < \varepsilon$.

Note que, como $x \neq 1$, obrigatoriamente precisamos exigir que $0 < \delta < 3$. Avaliando $|f(x) - \frac{1}{3}|$ obtemos:

$$|f(x) - \tfrac{1}{3}| = \left| \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3-x+1}{3(x-1)} \right| = \frac{|x-4|}{3|x-1|}.$$

Como devemos ter $0 < |x-4| < \delta$, temos

$$|f(x) - \tfrac{1}{3}| = \frac{|x-4|}{3|x-1|} < \frac{\delta}{3|x-1|}.$$

Vamos estimar $|x-1|$ em termos de δ: note que

$$|x-1| = |3 + (x-4)| \geq 3 - |x-4|;$$ e como

$|x-4| < \delta \implies -|x-4| > -\delta$, e daí

$$|x-1| \geq 3 - |x-4| > 3 - \delta \implies \frac{1}{|x-1|} < \frac{1}{3-\delta}; \text{ logo:}$$

$$|f(x) - \tfrac{1}{3}| < \frac{\delta}{3|x-1|} < \underbrace{\frac{\delta}{3(3-\delta)}}_{:=\varepsilon}$$

Sendo $|f(x) - \frac{1}{3}| < \varepsilon$, é natural considerar $\varepsilon = \dfrac{\delta}{3(3-\delta)}$,

isolando δ, obtemos:

$3\varepsilon(3-\delta) = \delta$

$9\varepsilon - 3\delta\varepsilon = \delta$

$9\varepsilon = 3\delta\varepsilon + \delta$

$9\varepsilon = \delta(3\varepsilon + 1)$

$\implies \delta = \dfrac{9\varepsilon}{3\varepsilon+1} > 0$.

Assim, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $\left(\delta = \dfrac{9\varepsilon}{3\varepsilon+1}\right)$ tal que, $\forall x : 0 < |x-4| < \delta$, implica em $|f(x) - \frac{1}{3}| < \varepsilon$, i.e.,

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}. \quad \square$$

c) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$; $a > 0$:

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x$: $0 < |x - a| < \delta$, implique em $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$.

Vamos estimar $|\sqrt{x} - \sqrt{a}|$: racionalizando, obtemos:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \right| = \left| \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| = \frac{|x - a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \quad (*)$$

Como $D(f) = (0, +\infty)$, temos que $|\sqrt{x} + \sqrt{a}| = \sqrt{x} + \sqrt{a} > \sqrt{a}$, e assim, $(*)$ fica majorado por [LEMBRE QUE $0 < |x - a| < \delta$ E QUE $\sqrt{x} + \sqrt{a} > \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$]

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \underbrace{\frac{\delta}{\sqrt{a}}}_{:= \varepsilon}$$

Escrevendo $\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{a}}$ obtemos $\delta = \sqrt{a} \cdot \varepsilon$. Logo, obtemos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ (a saber, $\delta = \sqrt{a} \cdot \varepsilon$) tal que, $\forall x$: $0 < |x - a| < \delta$, implica que $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$; ou seja, mostramos que

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}. \qquad \square$$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$:

Dado $\varepsilon > 0$, achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x$: $0 < |x - 0| < \delta$, implique em $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Para isso, vamos estimar $|f(x) - 0|$:

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = \left| x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| .$$

Como $0 < |x| < \delta$ e $|\operatorname{sen} \theta| \leq 1$ (o seno é limitado) segue que

$$|f(x) - 0| = \underbrace{|x|}_{< \delta} \underbrace{\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right|}_{\leq 1} < \delta \cdot 1 = \delta := \varepsilon$$

Logo, tomando $\delta = \varepsilon$ serve. $\square$

02) Suponha que $\lim_{x \to 3} x \cdot f(x) = 12$.

Como o limite do produto é igual ao prod. dos limites, temos que

$$12 = \lim_{x \to 3} x \cdot f(x) = \left(\lim_{x \to 3} x\right) \cdot \left(\lim_{x \to 3} f(x)\right),$$

e para isto existir, cada fator existe, segue que $\exists \lim_{x \to 3} f(x)$ e daí

$$\underbrace{\left(\lim_{x \to 3} x\right)}_{=3} \cdot \left(\lim_{x \to 3} f(x)\right) = 12 \Rightarrow 3 \cdot \lim_{x \to 3} f(x) = 12$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 3} f(x) = 4}.$$

---

03) UM EXEMPLO EM QUE $\exists \lim_{x \to 0} (f(x) + g(x))$ mas que

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ e $\nexists \lim_{x \to 0} g(x)$:

Há vários exemplos. Vamos tomar um que seja simples; por exemplo, tomamos $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = -\frac{1}{x}$.

Note que $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ e $\nexists \lim_{x \to 0} g(x)$ (*); no entanto,

$$\lim_{x \to 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} 0 = 0.$$

(*) Por exemplo, se calcularmos: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; e como estes limites laterais são <u>DIFERENTES</u>, segue que $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$. O mesmo para a $g(x)$.

04) Sendo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$; $M \neq 0$, $M \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} 1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)} .$$

O LIMITE DO QUOCIENTE É IGUAL AO QUOCIENTE DO LIMITE

O LIMITE DE UMA CONSTANTE É A PRÓPRIA CONSTANTE

---

05) $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} . \end{cases}$$

Dado $a \in [0,1]$. Afirmamos que $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

De fato, tomando por exemplo $\varepsilon = 0,5$; para qualquer $\delta > 0$, temos que $\exists\, x_0 \in (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$ tal que $x_0 \notin \mathbb{Q}$; e assim, $f(x_0) = 0$, o que acarreta em

$$|f(x_0) - 1| = |0-1| = 1 > 0,5 = \varepsilon ;$$

portanto, $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$; $\forall\ a \in [0,1]$.

---

06) AS RESPOSTAS FINAIS ESTÃO NA LISTA ...

07) Suponha que vale, $\forall x$:

$$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}. \qquad (*)$$

Mostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

De fato, subtraindo 1 em $(*)$, obtemos:

$$-\frac{x^2}{2} \leq \cos x - 1 \leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}. \qquad (**)$$

Tomando $x>0$, vamos dividir $(**)$ por $x>0$ e obtemos:

$$-\frac{x}{2} \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq -\frac{x}{2}+\frac{x^3}{4}.$$

Chamando $f(x) = -\frac{x}{2}$; $g(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$ e $h(x) = -\frac{x}{2}+\frac{x^3}{4}$, temos $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, Note também que

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{2} = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{2}+\frac{x^3}{4} = 0$;

Assim, estamos nas hipóteses do T. do Sanduíche, donde segue que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0} . \qquad (A)$$

Agora, dividindo $(**)$ por $x<0$, obtemos

$$-\frac{x}{2} \geq \frac{\cos x - 1}{x} \geq -\frac{x}{2}+\frac{x^3}{4}; \text{ ou seja,}$$

$$-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{4} \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq -\frac{x}{2}, \quad x<0.$$ Aplicando

"$\lim_{x\to 0^-}$", pelo T. do Sanduíche concluiremos que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \qquad (B)$$

De (A) e (B) segue que $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$. ∎

08) $\forall x \neq 0; \quad -x^2+3x \leq f(x) \leq \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Como $\lim\limits_{x \to 1} (-x^2+3x) = -1+3 = 2$ e

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} x+1 = 2;$$

pelo T. do Sanduíche segue que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

---

09) $\forall x; \quad |g(x)| \leq x^4$. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

Note que, $\forall x \neq 0;$

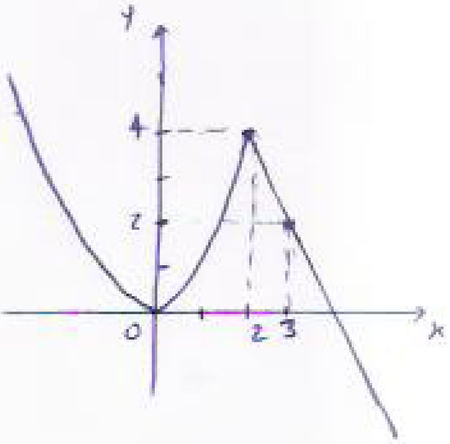
$$0 \leq |g(x)| \leq x^4 \Rightarrow 0 \leq \frac{|g(x)|}{x} \leq x^3$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$; pelo T. do Sanduíche segue que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|g(x)|}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 0$$

---

10) (a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 8-2x, & x > 2 \end{cases}$

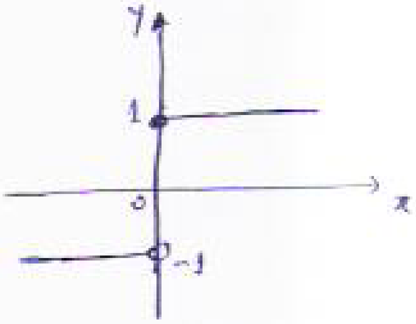


- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$

- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (8-2x) = 8 - 2(2) = 4$

Como $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$, concluímos que $\exists \lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

(b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$



$f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1, & \text{se } x \geqslant 0 \\ \dfrac{-x}{x} = -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$

Como $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$, concluímos que $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$.

---

11) Achar $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\exists \lim_{x \to -2} f(x)$ e $\exists \lim_{x \to 2} f(x)$.

$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq -2 \\ ax+b, & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2x-6, & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$.

Para ~~porque~~ $\exists \lim_{x \to -2} f(x)$: Vamos ter que os limites laterais existem e são iguais:

- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} x^2 = 4$.
- $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} ax+b = -2a+b$

Como queremos que exista tal limite, determinamos que

$\boxed{-2a+b=4}$ (I)

segue (...)

Agora, como também $\exists \lim_{x\to 2} f(x)$, os limites laterais existem e são iguais:

- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax+b) = 2a+b$

- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x-6) = 2\cdot(2)-6 = -2$;

Como $\exists \lim_{x\to 2} f(x)$, estes limites são iguais, ou seja,

$$\boxed{2a+b=-2} \quad (\text{II}).$$

Juntando (I) e (II) temos:

$$+\begin{cases} -2a+b = 4 \\ 2a+b = -2 \end{cases}$$
$$2b = 2 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

$$\begin{cases} -2a+b = 4 \\ -2a+1 = 4 \\ -2a = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

---

12) (a) • $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2+3) = (1)^2+3 = 4$

• $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 1+1 = 2$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, segue que $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$.

(b) • $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$.

• $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$.

Como $\lim_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim_{x\to 1^+} g(x)$, segue que $\nexists \lim_{x\to 1} g(x)$.

(c) $$f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} (x^2+3)\cdot x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ (x+1)\cdot 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} x^4+3x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x+2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(d) • $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^4+3x^2) = (1)^4+3(1)^2 = 4$ //

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x+2) = 2\cdot(1)+2 = 4$ //

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)\cdot g(x)$, segue que

$$\exists \lim_{x \to 1} f(x)\cdot g(x) = 4.$$