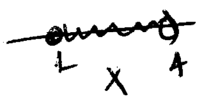
CÁLCULO 1 — lista 01. [ALGUMAS RESPOSTAS]

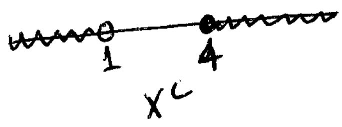
PROF. MAURÍCIO ZAHN.

02) (d) $[1,4)^c \cup (2,+\infty)$.

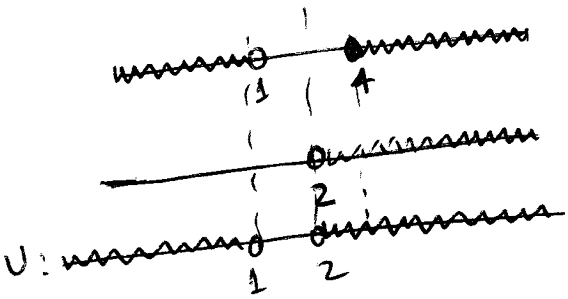
<u>Obs.</u>: $X \subset \mathbb{R}$, então X^c é o conj. dos elementos que estão fora de X. Assim:

$$X=[1,4) \Longrightarrow X^c=(-\infty,1)\cup[4,+\infty)$$





Logo: $[1,4)^c \cup (2,+\infty)$:



$$\Longrightarrow [1,4)^c \cup (2,+\infty) = (-\infty,1)\cup(2,+\infty).$$

---

05) Mostrar: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$.

Escreva $x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ e $y=1+\sqrt{3}$. Note que $x,y>0$.

Então $x^2 = 4+2\sqrt{3}$ e

$$y^2=(1+\sqrt{3})^2 = 1+2\sqrt{3}+3 = 4+2\sqrt{3};$$

ou seja, $x^2=y^2$, e então $x=\pm y$. Como $x,y>0$, concluímos que $x=y$, ou seja,

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}.$$

$\blacksquare$

---

06) A ideia é análoga à prova feita em aula de que $\sqrt{2}$ é irracional:

Por absurdo, suponha que $\sqrt{3}$ seja racional. Assim, $\exists\, p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}, \quad \text{com } mdc(p,q) = 1; \text{ i.e., } \frac{p}{q} \text{ é irredutível.}$$

Logo, elevando ao quadrado vem:

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 3q^2;$$ ou seja, p^2 é múltiplo de 3, e então p será múltiplo de 3. Assim, temos que $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 3m$, e daí temos:

$$\sqrt{3} = \frac{3m}{q} \underset{\substack{\text{elevando} \\ \text{ao quadrado}}}{\implies} 3 = \frac{(3m)^2}{q^2} \implies 3q^2 = 9m^2$$

$\implies q^2 = 3m^2$, ou seja, q^2 é múltiplo de 3; logo q também é múltiplo de 3, e disso segue que $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $q = 3n$. Assim:

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} = \frac{3m}{3n}, \quad \text{e então } mdc(p,q) > 1.$$

(seria pelo menos 3); o que é um absurdo pela hipótese de que $mdc(p,q) = 1$.

Portanto, $\sqrt{3}$ é irracional. $\square$

07) Suponha que $\forall \varepsilon > 0$, vale que $a < b + \varepsilon$.

Mostrar : $a \leq b$.

Por absurdo, suponha que $a > b$. Assim, tomando em particular $\varepsilon = a - b$, segue que

$$a < b + \varepsilon \Rightarrow a < b + (a - b)$$

$$\Rightarrow a < \cancel{b} + a - \cancel{b} \Rightarrow a < a. \quad \text{Absurdo!}$$

Portanto, $a \leq b$. $\square$

---

08) Antes de tudo, convém apresentar outra desigualdade de módulos: (*)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \geq |x| - |y|.$$

Isto posto, vejamos o exercício. Suponha que $|a - b| < \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$. Assim, usando (*), vem:

$$|a| - |b| \leq |a - b| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a| - |b| < \varepsilon \Rightarrow \boxed{|a| < |b| + \varepsilon} \quad (\mathrm{I})$$

Do mesmo modo:

$|b - a| = |a - b| < \varepsilon$, e daí, por (*), temos:

$$|b| - |a| < \varepsilon \quad \times(-1)$$

$$-|b| + |a| > -\varepsilon \Rightarrow \boxed{|a| > |b| - \varepsilon} \quad (\mathrm{II}).$$

Juntando (I) e (II) segue o resultado, ou seja,

$$|b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon. \quad \square$$

---

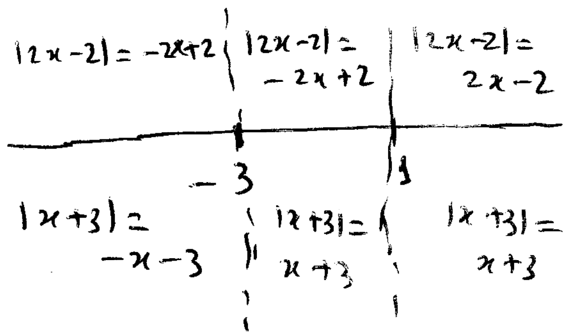
17) (b) $f(x) = |2x-2| + |x+3|$.

Como $|2x-2| = \begin{cases} 2x-2, & \text{se } 2x-2 \geq 0 \\ -(2x-2), & \text{se } 2x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-2, & \text{se } x \geq 1 \\ -2x+2, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

e

$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{se } x+3 \geq 0 \\ -(x+3), & \text{se } x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \geq -3 \\ -x-3, & \text{se } x < -3 \end{cases}$,

temos que "quebrar" a definição da f nas sentenças:

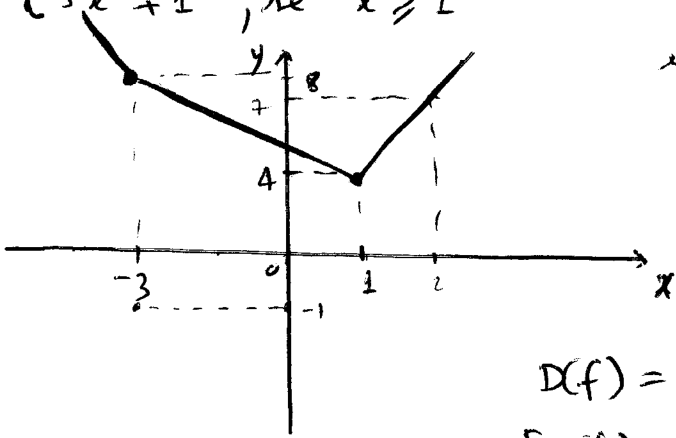


e assim:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2-x-3, & \text{se } x < -3 \\ -2x+2+x+3, & \text{se } -3 \leq x < 1 \\ 2x-2+x+3, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}, \text{ i.e.,}$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x-1, & \text{se } x < -3 \\ -x+5, & \text{se } -3 \leq x < 1 \\ 3x+1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

; onde em cada intervalo teremos um "pedaço" de reta.



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [4, +\infty)$.

18) $f\circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$(f\circ g) = f(g(x)) = \begin{cases} (g(x))^2 + 2\cdot g(x) + 4, & \text{se } g(x) \geq -1 \\ 3\cdot(g(x)) + 4, & \text{se } g(x) < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-3)^2 + 2\cdot(x-3) + 4, & \text{se } x-3 \geq +1 \\ 3\cdot(x-3) + 4, & \text{se } x-3 < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 4x + 7, & \text{se } x \geq 4 \\ 3x - 5, & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

---

19) $g\circ f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$;

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+2}{x}\right) = \frac{2}{\frac{x+2}{x} - 1} =$$

$$= \frac{2}{\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}}{x}} = x = id_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}.$$

$f\circ g: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$;

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{\frac{2}{x-1} + 2}{\frac{2}{x-1}} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{2} + 2x - \cancel{2}}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} = x = id_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}.$$

conclusão: f e g são inversas uma da outra.

$\square$

---

26) $t = 0 \Rightarrow V = V_0$ (V = VALOR ; V_0 = VALOR INICIAL)

$t = 1 \Rightarrow V = V_0 + \frac{1}{100} V_0 = V_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)$

$t = 2 \Rightarrow V = V_0\left(1 + \frac{1}{100}\right) + \frac{1}{100} V_0 \left(1 + \frac{1}{100}\right)$

$= V_0\left(1 + \frac{1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right) = V_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^2$

$\vdots$

Em geral; no tempo t qualquer, vemos que o valor $V(t)$ será:

$$V(t) = V_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^t = V_0 \cdot \left(\frac{101}{100}\right)^t.$$

Qual é o valor de t para que $V(t) = 2 \cdot V_0$?

Será:

$$2\cancel{V_0} = \cancel{V_0} \cdot \left(\frac{101}{100}\right)^t \Rightarrow 2 = \left(\frac{101}{100}\right)^t$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \ln\left(\frac{101}{100}\right)^t = t \cdot \ln\left(\frac{101}{100}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{101}{100}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln 101 - \ln 100} \text{ meses}$$

ou: $t \cong \dfrac{0,69314718}{4,61512052 - 4,60517019}$

$= \dfrac{0,69314718}{0,00995033} \cong 69,6607228\underline{1}$ meses

30) meia-vida : $12h$. $\quad m_0 = 8g$ (massa inicial)

(a) Sendo $m = m(t)$ a massa de substância radioativa ao longo do tempo t, temos:

$$t = 0 \Rightarrow m(0) = m_0.$$

$$t = 12h \Rightarrow m = \frac{1}{2} m_0$$

$$t = \underset{\overset{\shortparallel}{2 \cdot 12}}{24h} \Rightarrow m = \frac{1}{4} m_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot m_0$$

Em geral; $m(12t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t \cdot m_0$

Escrevendo $12t = T$, vem $t = \frac{T}{12}$ e daí:

$$\boxed{m(T) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T}{12}}} \quad ; \; m_0 = 8g.$$

(b) $T = ?$ quando $m(T) = 1g$?

$$1 = m(T) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T}{12}} \Rightarrow \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T}{12}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T}{12}} \Leftrightarrow \frac{T}{12} = 3 \Leftrightarrow \boxed{T = 36h}$$

__Obs.:__ De fato, __neste caso__ é fácil verificar: (nem sempre é fácil verificar)

$$\underbrace{8g \xrightarrow{12h} 4g \xrightarrow{+12h} 2g \xrightarrow{+12h}}_{36h} 1g$$

31) $m(t) = 0{,}145 \cdot m_0$; onde m_0 - massa inicial de C^{14}.

$t = 0 \Rightarrow m = m_0$

$t = 5730$ anos $\Rightarrow m = \dfrac{m_0}{2}$

$t = 2 \cdot 5730$ anos $\Rightarrow m = \dfrac{m_0}{2^2}$

$\vdots$

$t = k \cdot 5730$ anos $\Rightarrow m = \dfrac{m_0}{2^k}$.

$\Rightarrow m(t) = m_0 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^t$; $t = k \cdot 5730 \Rightarrow k = \dfrac{t}{5730}$;

e daí:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} .$$

Vamos agora determinar t tal que $m(t) = 0{,}145 \cdot m_0$:

$$0{,}145\, \cancel{m_0} = m(t) = \cancel{m_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\Rightarrow 0{,}145 = (0{,}5)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow \ln 0{,}145 = \ln (0{,}5)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\Rightarrow \ln 0{,}145 = \frac{t}{5730} \cdot \ln 0{,}5$$

$$\Rightarrow t = \frac{5730 \cdot \ln 0{,}145}{\ln 0{,}5} \simeq 15.963{,}06 \text{ anos}.$$

3b) (b) $y = |1-2^{x-1}|$. $D(f) = \mathbb{R}$.

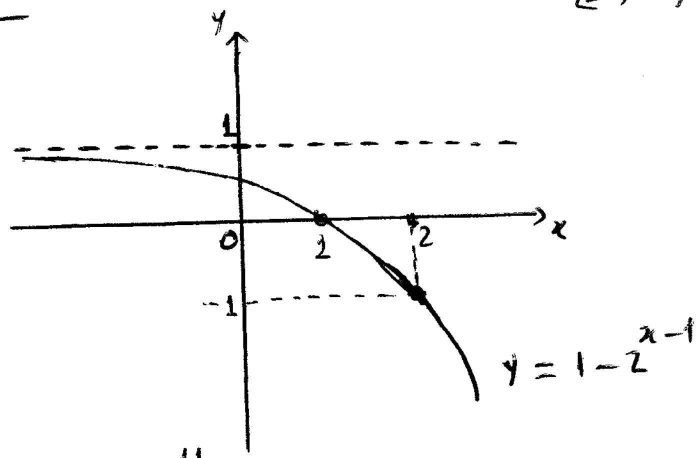
$1 - 2^{x-1} = y \iff -2^{x-1} = y-1$

$\iff 2^{x-1} = 1-y > 0$

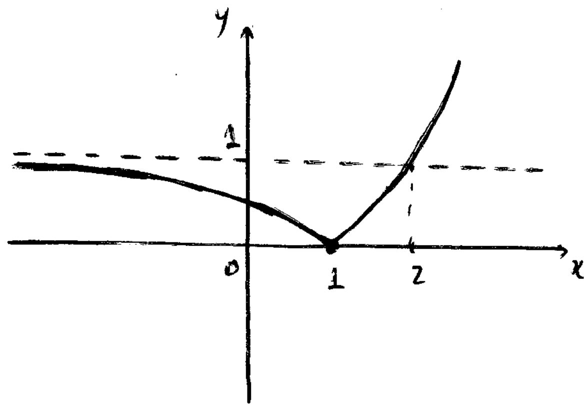
$\iff y < 1$.

1º: $y = 1 - 2^{x-1}$

x	$y = 1 - 2^{x-1}$
1	0
2	-1



2º: $y = |1-2^{x-1}|$ "passando o módulo"



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [0, +\infty)$

(d) $y = 1 - 2 \cdot \log_2(1-x) \iff \frac{1-y}{2} = \log_2(1-x)$

$\iff 2^{\frac{1-y}{2}} = 1-x \iff x = 1 - 2^{\frac{1-y}{2}}$

$x = 1-2^{\frac{1-y}{2}}$	y
+0	1
-1	-1

$1-x > 0$

$x < 1$

$\Rightarrow D(f) = (-\infty, 1)$

$Im(f) = \mathbb{R}$.