Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Resposta da Lista 04 de Exercícios - Funções Convexas

1. Prove a desigualdade de Jensen básica: *Se $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função convexa em I, então*
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \quad \textit{para todos } a, b \in I.$$

2. Prove a seguinte desigualdade, conhecida por *Desigualdade de Young*: Dados $p, q > 1$ reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para quaisquer $a, b \geq 0$, vale
$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$
Quando $p = q = 2$, o que temos?

Solução. Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ é convexa, temos que
$$a \cdot b = e^{\ln(a \cdot b)} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{p}{p}\ln a + \frac{q}{q}\ln b} =$$
$$= e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln a^q} = f(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln a^q),$$
e como $f(x) = e^x$ é convexa e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, segue que
$$a \cdot b = f(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln a^q) \leq \frac{1}{p}f(\ln a^p) + \frac{1}{q}f(\ln b^q) = \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$
Em particular, para o caso $p = q = 2$, temos uma prova bem mais simples, basta observar que
$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab,$$
donde segue que
$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

3. Sejam $t_1, t_2, ..., t_n \geq 0$ tais que $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$. Prove que
$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdot ... \cdot x_n^{t_n} \leq t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot x_2 + ... + t_n \cdot x_n.$$

4. Se f e g são funções convexas, pode-se concluir que a composição $g \circ f$ é também convexa? Se não, que condição devemos impor de modo a garantir a convexidade de $g \circ f$?

Solução. A função g deverá ser, além de convexa, crescente. Assim, para todos $x, y \in \mathrm{D}_{(g \circ f)}$ e $\lambda \in [0, 1]$, temos que
$$(g \circ f)(\lambda x + (1-\lambda)y) = g(f(\lambda x + (1-\lambda)y)).$$
Como $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, devido à convexidade da f, pelo fato de g ser crescente, vem que
$$g(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y));$$

e pela convexidade da g, concluímos que

$$(g \circ f)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda)g(f(y)) =$$
$$= \lambda(g \circ f)(x) + (1-\lambda)(g \circ f)(y).$$

5. **(Sel. Mestr. UFRGS 2014/2)**[1] Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I. A função f é chamada *convexa* se
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$
para todo $t \in [0,1]$ e para todo $x, y \in I$.

   (a) Mostre que para todo $a, x, b \in I$ com $a < x < b$, tem-se que
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

   (b) Prove que toda função convexa $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto (a,b), é contínua.

   (c) Dê um exemplo para mostrar que uma função convexa não é necessariamente contínua.

6. Usando a função $f(x) = x \cdot \ln x$, prove que, para quaisquer $a, b, x, y > 0$, tem-se
$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{a} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}.$$

Solução. Defina $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x \ln x$.

Note que f é convexa. De fato, basta notar que
$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \ \forall x \in (0, +\infty).$$

Assim, por Teorema estudado em aula, segue que f é convexa.

Assim, dados $a, b > 0$, tome $\lambda = \frac{a}{a+b}$. Logo, $1 - \lambda = \frac{b}{a+b}$ e, $\forall x, y \in (0, +\infty)$, teremos
$$f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) = f\left(\frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{y}{b}\right) \leq \frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} f\left(\frac{y}{b}\right) =$$
$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{a} \ln \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{y}{b} \ln \frac{y}{b} = \frac{x}{a+b} \ln \frac{x}{a} + \frac{y}{a+b} \ln \frac{y}{b}.$$

Portanto,
$$\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \ln \frac{x+y}{a+b} = f(\frac{x+y}{a+b}) \leq \frac{x}{a+b} \ln \frac{x}{a} + \frac{y}{a+b} \ln \frac{y}{b},$$

donde segue o resultado.

[1] Esse exercício, embora seja da prova da UFRGS, na verdade corresponde a resultados apresentados e provados no livro "*Análise Real, vol. 1*", do autor Elon Lages Lima - páginas 105 e 106.

7. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua convexa tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Prove que existe um único ponto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Solução. Como $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) < 0 < f(b)$, pelo Teorema do Valor Intermediário segue que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Resta mostrar a unicidade.

Suponha que existam $c_1, c_2 \in (a,b)$ tais que $f(c_1) = f(c_2) = 0$. Sem perda de generalidade, assuma que $a < c_1 < c_2 < b$. Escreva c_1 como uma combinação convexa de a e c_2, ou seja, escreva

$$c_1 = \lambda a + (a - \lambda)c_2, \text{ com } \lambda \in [0,1].$$

Assim, sendo f convexa, temos

$$f(c_2) = f(c_1) = f(\lambda a + (1-\lambda)c_2) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(c_2) = \lambda f(a) + f(c_2) - \lambda f(c_2).$$

Logo, concluímos que $\lambda f(a) - \lambda f(c_2) \geq 0$, ou seja,

$$f(a) \geq f(c_2) = 0,$$

mas $f(a) < 0$, por hipótese. Absurdo! Portanto, $c_1 = c_2$, ou seja, segue a unicidade.

8. **(Sel. Mestr. UFSM 2013/1)** Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *côncava* se para quaisquer $x, y \in I$ e $t \in [0,1]$, temos

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ côncava e contínua, com $f(a) < f(b)$. Mostre que para cada $d \in (f(a), f(b))$, existe um único $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

Solução. Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(a) < d < f(b)$ (pois $d \in (f(a), f(b))$), segue pelo Teorema do Valor Intermediário que $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

Resta mostrar a unicidade de c.

Sejam $c_1, c_2 \in (a,b)$ e suponha $c_1 \neq c_2$ tais que $f(c_1) = f(c_2) = d$. Sem perda de generalidade, assuma que $a < c_1 < c_2 < b$.

Assim, escreva $c_2 = \lambda c_1 + (1-\lambda)b$, onde $\lambda \in [0,1]$. Sendo f côncava, temos que

$$f(c_1) = d = f(c_2) = f(\lambda c_1 + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(c_1) + (1-\lambda)f(b),$$

e, portanto,

$$(1-\lambda)f(c_1) \geq (1-\lambda)f(b) \Rightarrow f(c_1) \geq f(b),$$

i.e., $d = f(c_1) \geq f(b)$. Mas $d < f(b)$, por hipótese. Absurdo! Portanto, $c_1 = c_2$, ou seja, segue a unicidade.